

Kapitel 4: Brownsche Bewegung, Wiener-Maß und das Black-Scholes Modell: Stochastische Integrale und das Ito-Lemma

Das Ito-Lemma ist jetzt keine grosse Sache mehr, die wesentliche Arbeit haben wir schon gemacht. Es sei $f = f(x)$ eine beliebige Funktion. Für das x wollen wir die Brownsche Bewegung x_t in das f einsetzen. Wir betrachten die Differenz $f(x_T) - f(x_0)$ für einen gegebenen Zeithorizont $T > 0$ und schreiben

$$f(x_T) - f(x_0) = \sum_{k=1}^N \{ f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}}) \} \quad (1)$$

mit $t_k = k\Delta t$ und $N = T/\Delta t$ so dass $t_N = N\Delta t = T$ wie üblich. Da wir am Ende den Limes $\Delta t \rightarrow 0$ nehmen wollen, schreiben wir gleich dt anstatt Δt und dx_t anstatt Δx_t . Also etwa $t_k = k dt$ und $dx_{t_k} = x_{t_k} - x_{t_{k-1}} = \sqrt{dt} \phi_k$. Wir haben dann also:

$$x_{t_k} = x_{t_{k-1}} + dx_{t_k} \quad (2)$$

Mit dem Satz von Taylor können wir dann schreiben:

$$\begin{aligned} f(x_{t_k}) &= f(x_{t_{k-1}} + dx_{t_k}) \\ &= f(x_{t_{k-1}}) + f'(x_{t_{k-1}}) dx_{t_k} + \frac{1}{2} f''(x_{t_{k-1}}) (dx_{t_k})^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_{t_{k-1}}) (dx_{t_k})^3 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Jetzt benutzen wir die Rechenregeln für die Brownsche Bewegung:

$$(dx_{t_k})^2 = dt$$

und

$$(dx_{t_k})^3 = (dx_{t_k})^2 dx_{t_k} = dt dx_{t_k} = 0$$

Also bekommen wir im Limes $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} f(x_{t_k}) &= f(x_{t_{k-1}}) + f'(x_{t_{k-1}}) dx_{t_k} + \frac{1}{2} f''(x_{t_{k-1}}) dt + \frac{1}{3!} f'''(x_{t_{k-1}}) \times 0 \\ &= f(x_{t_{k-1}}) + f'(x_{t_{k-1}}) dx_{t_k} + \frac{1}{2} f''(x_{t_{k-1}}) dt \end{aligned} \quad (4)$$

oder die folgende Formel, die auch als **Ito-Formel in differentieller Version** bezeichnet wird:

$$df(x_{t_k}) := f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}}) = f'(x_{t_{k-1}}) dx_{t_k} + \frac{1}{2} f''(x_{t_{k-1}}) dt \quad (5)$$

Wenn wir (5) in (1) einsetzen, bekommen wir

$$\begin{aligned}
f(x_T) - f(x_0) &= \sum_{k=1}^N \{ f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}}) \} \\
&= \sum_{k=1}^N \left\{ f'(x_{t_{k-1}}) dx_{t_k} + \frac{1}{2} f''(x_{t_{k-1}}) dt \right\} \\
&\stackrel{\Delta t \rightarrow 0}{=} \int_0^T f'(x_t) dx_t + \frac{1}{2} \int_0^T f''(x_t) dt
\end{aligned} \tag{6}$$

Das erste Integral in (6), wir ersetzen zum Zwecke der Definition den Integranden f' durch ein f ,

$$\int_0^T f(x_t) dx_t := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N f(x_{t_{k-1}}) dx_{t_k} \tag{7}$$

wird auch als ein stochastisches Ito-Integral bezeichnet. Neben solchen stochastischen Ito-Integralen gibt es auch stochastische Stratonovich-Integrale, diese sind folgendermassen definiert

$$\int_0^T f(x_t) \circ dx_t := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{x_{t_{k-1}} + x_{t_k}}{2}\right) dx_{t_k} \tag{8}$$

Man tut also das f nicht am 'linken Randpunkt' $x_{t_{k-1}}$ evaluieren, sondern am 'Intervallmittelpunkt' $\frac{x_{t_{k-1}} + x_{t_k}}{2}$. Bei den üblichen deterministischen Riemann-Integralen wie man sie aus der Analysis kennt, spielt das natürlich keine Rolle und im Limes Rechteckbreite gegen Null kommt da immer dasselbe raus. Das liegt daran, dass $(dt)^2 = 0$ ist oder wenn die deterministische Integrationsvariable ein x ist, $(dx)^2 = 0$. Für eine Brownsche Bewegung ist nun aber $(dx_t)^2 \neq 0$ und das hat die folgende, auf den ersten Blick doch etwas gewöhnungsbedürftige Konsequenz:

Theorem 4.4: Für stochastische Ito- und Stratonovich-Integrale besteht der folgende Zusammenhang:

$$\int_0^T f(x_t) \circ dx_t = \int_0^T f(x_t) dx_t + \frac{1}{2} \int_0^T f'(x_t) dt \tag{9}$$

für eine beliebige Funktion $f = f(x)$.

Proof: Mit $dx_{t_k} = x_{t_k} - x_{t_{k-1}}$ haben wir

$$\frac{x_{t_{k-1}} + x_{t_k}}{2} = x_{t_{k-1}} + \frac{x_{t_k} - x_{t_{k-1}}}{2} = x_{t_{k-1}} + \frac{dx_{t_k}}{2}$$

und damit

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x_{t_{k-1}} + x_{t_k}}{2}\right) dx_{t_k} &= f\left(x_{t_{k-1}} + \frac{dx_{t_k}}{2}\right) dx_{t_k} \\
&\stackrel{\text{Taylor}}{=} \left\{ f(x_{t_{k-1}}) + f'(x_{t_{k-1}}) \frac{dx_{t_k}}{2} + \frac{1}{2} f''(x_{t_{k-1}}) \left(\frac{dx_{t_k}}{2}\right)^2 \right\} dx_{t_k} \\
&\stackrel{(10)}{=} f(x_{t_{k-1}}) dx_{t_k} + f'(x_{t_{k-1}}) \frac{(dx_{t_k})^2}{2} + \frac{1}{2} f''(x_{t_{k-1}}) \frac{dt dx_{t_k}}{4} \\
&\stackrel{(10)}{=} f(x_{t_{k-1}}) dx_{t_k} + f'(x_{t_{k-1}}) \frac{dt}{2} + \frac{1}{2} f''(x_{t_{k-1}}) \times 0
\end{aligned}$$

wobei wir wieder die Rechenregeln

$$\begin{aligned}(dx_t)^2 &= dt \\ dx_t dt &= 0 \\ (dt)^2 &= 0\end{aligned}\tag{10}$$

benutzt haben. Also,

$$\begin{aligned}\int_0^T f(x_t) \circ dx_t &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{x_{t_{k-1}} + x_{t_k}}{2}\right) dx_{t_k} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N \left\{ f(x_{t_{k-1}}) dx_{t_k} + f'(x_{t_{k-1}}) \frac{dt}{2} \right\} \\ &= \int_0^T f(x_t) dx_t + \frac{1}{2} \int_0^T f'(x_t) dt\end{aligned}$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

Aus (6) und (9) ergibt sich dann sofort das

Theorem 4.5: Es sei $f = f(x)$ eine beliebige, zweimal differenzierbare Funktion und $\{x_t\}_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Dann gilt:

$$f(x_T) - f(x_0) = \int_0^T f'(x_t) dx_t + \frac{1}{2} \int_0^T f''(x_t) dt\tag{11}$$

$$= \int_0^T f'(x_t) \circ dx_t\tag{12}$$

Dabei ist das erste Integral in (11) ein stochastisches Ito-Integral und das Integral in (12) ist ein stochastisches Stratonovich-Integral. Die Formel (11) wird auch als Ito-Formel oder als das **Ito-Lemma bezeichnet, in integraler Version.**

In der letzten Veranstaltung vor Weihnachten, am nächsten Dienstag, wollen wir diese Sachen dann noch durch ein paar Excel/VBA-Simulationen veranschaulichen. Also folgende Sachen würden sich da anbieten:

Excel/VBA-Demos:

- a) Plausibilisieren Sie die Aussage des Theorems 4.3 aus dem week9a.pdf durch eine geeignete Excel/VBA-Simulation.
- b) Plausibilisieren Sie die Aussage des Theorems 4.4 aus diesem week9b.pdf durch eine geeignete Excel/VBA-Simulation.
- c) Überprüfen Sie die Ito-Formel in integraler Version, das ist die Gleichung (11) im Theorem 4.5, durch eine geeignete Excel/VBA-Simulation.