Kapitel 4: Brownsche Bewegung, Wiener-Maß und das Black-Scholes Modell: Rechenregeln für die Brownsche Bewegung und Übung zu Theorem 4.1

Bevor wir in der nächsten Veranstaltung zu stochastischen Integralen und zum Ito-Lemma kommen, wollen wir noch ein bischen üben, wie man Erwartungswerte bezüglich des Wiener-Masses berechnet, das ging mit dem

Theorem 4.1: *Let $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ be some function and let $0 =: t_0 < t_1 < \cdots < t_m \leq T$. Then*

$$\int F(x_{t_1}, ..., x_{t_m})\, dW(\{x_t\}_{0<t\leq T}) \;=\; \int_{\mathbb{R}^m} F(x_{t_1}, ..., x_{t_m}) \prod_{\ell=1}^{m} p_{t_\ell - t_{\ell-1}}(x_{t_{\ell-1}}, x_{t_\ell})\, dx_{t_\ell} \tag{1}$$

where the kernels $p_t(x, y)$ are given by

$$p_t(x, y) := \tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$$

and satisfy the equations

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\mathbb{R}} p_s(x, y) p_t(y, z)\, dy &= p_{s+t}(x, z)\ , \\ \textstyle\int_{\mathbb{R}} p_s(x, y)\, dy &= 1\ . \end{aligned}$$

Dazu schauen wir uns die folgende Übungsaufgabe an:

Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$ sei das Wiener-Maß. Zeigen Sie: Für $t > s$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\big[\, x_t - x_s \,\big] &= 0 \\ \mathsf{V}\big[\, x_t - x_s \,\big] &= t - s \\ \mathsf{E}\big[\, |x_t - x_s| \,\big] &= \sqrt{\tfrac{2}{\pi}(t - s)} \\ \mathsf{V}\big[\, |x_t - x_s| \,\big] &= \big(1 - \tfrac{2}{\pi}\big)(t - s) \end{aligned}$$

Lösung: Since all expectations and variances to be calculated depend on the Brownian motion observed at two times s and t with $s < t$, we have to use Theorem 4.1 with $m = 2$:

$$\mathsf{E}\big[F(x_s, x_t)\big] \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} F(x_s, x_t)\, p_s(0, x_s)\, p_{t-s}(x_s, x_t)\, dx_s\, dx_t \tag{2}$$

If the quantities to be calculated depend only on the difference $x_t - x_s$, that is, $F(x_s, x_t) = f(x_t - x_s)$ with some function f, then

$$\mathsf{E}\big[F(x_s, x_t)\big] \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} f(x_t - x_s)\, p_s(0, x_s)\, p_{t-s}(x_s, x_t)\, dx_s\, dx_t$$

and we can calculate as follows:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[F(x_s,x_t)\big] &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x_t-x_s)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\,e^{-\frac{x_s^2}{2s}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\,e^{-\frac{(x_t-x_s)^2}{2(t-s)}}\,dx_s\,dx_t \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(y)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\,e^{-\frac{x_s^2}{2s}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\,e^{-\frac{y^2}{2(t-s)}}\,dx_s\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\,e^{-\frac{x_s^2}{2s}}\,dx_s \times \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\,e^{-\frac{y^2}{2(t-s)}}\,dy \\
&= 1\times \int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{t-s}\,v)\,e^{-\frac{v^2}{2}}\,\tfrac{dv}{\sqrt{2\pi}} \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{t-s}\,v)\,e^{-\frac{v^2}{2}}\,\tfrac{dv}{\sqrt{2\pi}} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Thus, with the formulae from Übungsblatt5, we obtain:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}[\,x_t-x_s\,] &\overset{\substack{\text{Definiton}\\ \text{of } \mathsf{E}[\,\cdot\,]}}{=} \int (x_t-x_s)\,dW(\{x_t\}_{0<t\le T}) \overset{(3)}{=} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{t-s}\,v\,e^{-\frac{v^2}{2}}\,\tfrac{dv}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \sqrt{t-s}\int_{\mathbb{R}} v\,e^{-\frac{v^2}{2}}\,\tfrac{dv}{\sqrt{2\pi}} = 0
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}[\,|x_t-x_s|\,] &= \int |x_t-x_s|\,dW(\{x_t\}_{0<t\le T}) \overset{(3)}{=} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{t-s}\,|v|\,e^{-\frac{v^2}{2}}\,\tfrac{dv}{\sqrt{2\pi}} \\
&= 2\sqrt{t-s}\int_0^\infty v\,e^{-\frac{v^2}{2}}\,\tfrac{dv}{\sqrt{2\pi}} \\
&= 2\sqrt{t-s}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}(t-s)}
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}[\,|x_t-x_s|^2\,] = \mathsf{E}[\,(x_t-x_s)^2\,] &= \int (x_t-x_s)^2\,dW(\{x_t\}_{0<t\le T}) \overset{(3)}{=} \int_{\mathbb{R}} \big(\sqrt{t-s}\,v\big)^2\,e^{-\frac{v^2}{2}}\,\tfrac{dv}{\sqrt{2\pi}} \\
&= (t-s)\int_{\mathbb{R}} v^2\,e^{-\frac{v^2}{2}}\,\tfrac{dv}{\sqrt{2\pi}} = t-s
\end{aligned}
$$

which gives

$$
\begin{aligned}
\mathsf{V}[\,x_t-x_s\,] &= \mathsf{E}[\,(x_t-x_s)^2\,] - \big(\mathsf{E}[\,x_t-x_s\,]\big)^2 \\
&= t-s
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\mathsf{V}[\,|x_t-x_s|\,] &= \mathsf{E}[\,(x_t-x_s)^2\,] - \big(\mathsf{E}[\,|x_t-x_s|\,]\big)^2 \\
&= t-s-\tfrac{2}{\pi}(t-s) = \big(1-\tfrac{2}{\pi}\big)(t-s) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Als nächstes wollen wir uns mit der Rechenregel für die Brownsche Bewegung

$$(dx_t)^2 \;=\; dt \tag{4}$$

vertraut machen. Die ist dafür verantwortlich, dass es so etwas wie 'stochastic calculus' gibt, nämlich, dass man bei Rechnungen mit infinitesimalen Grössen bei stochastischen Objekten immer Terme bis zur 2. Ordnung mitnehmen muss. Grundlage dazu ist das folgende Theorem, was wir für den Spezialfall $f(t) = 1$ mit dem Theorem 4.2 bereits bewiesen haben. Der Beweis für den allgemeinen Fall, für beliebiges f, geht völlig analog. Wir verzichten auf den allgemeinen Beweis und werden dafür später noch eine Excel/VBA-Simulation machen.

Theorem 4.3: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ sei eine beliebige Funktion. Für eine Diskretisierung $\{0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, N\Delta t = T\}$ des Intervalls $[0,T]$ definieren wir die Grösse

$$I_{\Delta t}(f) \;:=\; \sum_{k=1}^{N} f(t_k)\,(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})^2 \;=\; \Delta t \sum_{k=1}^{N_t} f(t_k)\,\phi_k^2 \tag{5}$$

Dann gilt

$$\lim_{\Delta t \to 0} I_{\Delta t}(f) \;=\; \int_0^T f(t)\,dt \;\;. \tag{6}$$

Dabei ist der Limes im folgenden Sinne zu verstehen:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \mathsf{Prob}\Big[\, \big|I_{\Delta t}(f) \,-\, \int_0^T f(t)\,dt\big| \,\geq\, \varepsilon \,\Big] \;=\; 0 \qquad \forall \varepsilon > 0 \;\;.$$

Aus diesem Theorem ergeben sich dann die

Rechenregeln für die Brownsche Bewegung: Schreibt man den Ausdruck in (5) im Limes $\Delta t \to 0$ als $\int_0^T f(t)\,(dx_t)^2$, dann liest sich die Gleichung (6) folgendermaßen:

$$\int_0^T f(t)\,(dx_t)^2 \;=\; \int_0^T f(t)\,dt \tag{7}$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung (7) wird üblicherweise in der kompakten Notation

$$(dx_t)^2 \;=\; dt \tag{8}$$

zum Ausdruck gebracht, obwohl die Gleichung (8) nur für sich genommen, etwa wieder mit endlicher Diskretisierung $dt \to \Delta t > 0$, ja nicht richtig ist: Die Brownsche Bewegung ist gegeben durch (bei endlicher Diskretisierung)

$$x_{t_k} \;=\; \sqrt{\Delta t}\, \textstyle\sum_{j=1}^{k} \phi_j \tag{9}$$

mit standard-normalverteilten Zufallszahlen ϕ_j, also ist

$$(dx_t)^2 \;\leftarrow\; (\Delta x_{t_k})^2 \;=\; (x_{t_k} - x_{t_{k-1}})^2 \;=\; \big(\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\big)^2 \;=\; \Delta t\,\phi_k^2 \;\;\neq\;\; \Delta t \;\to\; dt \tag{10}$$

Erst wenn die Gleichung (10) über k summiert wird und dann der Limes $\Delta t \to 0$ genommen wird (und vorher vielleicht noch mit einem beliebigen Faktor f_{t_k} multipliziert wird), also erst nach Anwenden der Operation

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{N} f_{t_k} \cdots \qquad \text{mit } N = \tfrac{T}{\Delta t} \to \infty \tag{11}$$

erhält man aus (10) eine korrekte Identität. Allerdings, wenn man eine formale Rechnung macht, in der dt's und dx_t's vorkommen, hat man das Anwenden der Operation (11) am Ende der Rechnung üblicherweise immer vor um dann zu konkreten Zahlen zu kommen, und deshalb werden wir also im weiteren Verlauf der Vorlesung bei solchen Rechnungen immer die **folgenden Rechenregeln**

$$\begin{aligned} (dx_t)^2 &= dt \\ dx_t\, dt &= 0 \\ (dt)^2 &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

verwenden.