week7a: Kapitel 4: Brownsche Bewegung, Wiener-Maß und das Black-Scholes Modell: Das Theorem 4.1

Wir müssen noch das Theorem 4.1 aus dem week6b.pdf hinschreiben und beweisen. Wenn wir das gemacht haben, rechnen wir noch die erste Aufgabe von dem 6. Übungsblatt, um da schonmal ein paar Beispiele zu sehen.

Theorem 4.1: Es sei $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Weiter seinen m Zeitpunkte

$$0 =: t_0 < t_1 < \cdots < t_m \leq T$$

vorgegeben. Dann gilt, wenn $dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$ das Wiener-Maß bezeichnet,

$$\int F(x_{t_1}, ..., x_{t_m})\, dW(\{x_t\}_{0<t\leq T}) \;\; = \;\; \int_{\mathbb{R}^m} F(x_{t_1}, ..., x_{t_m}) \prod_{\ell=1}^{m} p_{t_\ell - t_{\ell-1}}(x_{t_{\ell-1}}, x_{t_\ell})\, dx_{t_\ell}$$

Beweis: Machen wir ausführlich an der Tafel. Wesentliches Hilfsmittel ist das Lemma 4.1, schreiben wir das auch nochmal hin:

Lemma 4.1: Es sei

$$p_t(x, y) \;\; := \;\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$$

Dann gilt

$$\textstyle\int_{\mathbb{R}} p_s(x, y) p_t(y, z)\, dy \;\; = \;\; p_{s+t}(x, z)$$

und

$$\textstyle\int_{\mathbb{R}} p_t(x, y)\, dy \;\; = \;\; 1 \;\; .$$

Ü-Blatt6, Aufgabe 1: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, $dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$ sei das Wiener-Maß und der Erwartungswert bezüglich W sei gegeben durch

$$\mathsf{E}[\, f \,] \;\; := \;\; \int f(\{x_t\})\, dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$$

wobei das f eine beliebige Funktion bezeichnet, die jedem Brownschen Pfad $\{x_t\}_{0\leq t\leq T}$ eine reelle Zahl

$$\{x_t\}_{0\leq t\leq T} \;\; = \;\; \{x_t\} \;\; \to \;\; f\big(\{x_t\}\big) \;\; \in \;\; \mathbb{R}$$

zuordnet.

a) Berechnen Sie folgende Erwartungswerte ($0 < t \leq T$):

a1) $\mathsf{E}[\, x_t \,]$

a2) $\mathsf{E}[\, x_t^2 \,]$

a3) $\mathsf{E}[\, x_t^n \,]$ mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Erinnern Sie sich dazu an die Formeln von letzten Übungsblatt 5.

b) Berechnen Sie die Varianz $\mathsf{V}[\, x_t \,]$ und die Standardabweichung $\sqrt{\mathsf{V}[\, x_t \,]}$ und skizzieren Sie die Standardabweichung als Funktion von $t \in [0, T]$ etwa für $T = 4$.

Da sämtliche zu berechnenden Grössen von der Form $\int f(x_t)\, dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$ sind und nicht etwa $\int f(x_{t_1}, x_{t_2})\, dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$, können Sie hier das Theorem 4.1 aus der Vorlesung mit $m = 1$ anwenden.