

**week6b: Kapitel 4: Brownsche Bewegung, Wiener-Maß
und das Black-Scholes Modell, Teil2**

In der letzten Veranstaltung hatten wir uns zunächst an die Datenanalyse für die Returns

$$\text{ret}_{t_k} = \frac{S_{t_k} - S_{t_{k-1}}}{S_{t_{k-1}}}$$

erinnert, die wir für die Eurostoxx50>Returns und in der Excel/VBA-Vorlesung auf dem 10. Übungsblatt gemacht hatten. Dort hatten wir, rein durch Betrachten der Daten, schon die Gleichung für das zeitdiskrete Black-Scholes Modell hergeleitet,

$$S_{t_k} = S_{t_{k-1}}(1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k)$$

wobei die ϕ_k 's standard-normalverteilte unabhängige Zufallszahlen sind. Dann hatten wir gesagt, dass wir Skalierungsverhalten mit Δt , also genauer, die Tatsache, dass man vor den Zufallszahlen ein $\sqrt{\Delta t}$ braucht und kein Δt , etwas genauer verstehen wollen, und hatten dazu den Ansatz

$$S_{t_k} = S_{t_{k-1}}(1 + \mu \Delta t^\alpha + \sigma \Delta t^\beta \phi_k) \quad (1)$$

gemacht. Auf $\alpha = 1$ sind wir dann relativ schnell gekommen, und dann, um auf $\beta = 1/2$ zu kommen, hatten wir eine Rechnung angefangen und dazu erstmal das μ auf 0 gesetzt, $\mu = 0$. In dem Fall haben wir dann mit $N = N_t = t/\Delta t$ oder $t = t_N = N\Delta t$

$$S_t = S_0 \prod_{k=1}^{N_t} (1 + \sigma \Delta t^\beta \phi_k) = S_0 \exp \left\{ \sum_{k=1}^{N_t} \log(1 + \sigma \Delta t^\beta \phi_k) \right\}$$

Dann hatten wir die Taylor-Entwicklung

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

benutzt, mit

$$x = \sigma \Delta t^\beta \phi_k$$

und waren auf

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp \left\{ \sum_{k=1}^{N_t} \left(\sigma \Delta t^\beta \phi_k - \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta t^{2\beta} \phi_k^2 + O(\Delta t^{3\beta}) \right) \right\} \\ &= S_0 \exp \left\{ \sigma \Delta t^\beta \sum_{k=1}^{N_t} \phi_k - \frac{\sigma^2}{2} \Delta t^{2\beta} \sum_{k=1}^{N_t} \phi_k^2 + O(\Delta t^{3\beta-1}) \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

gekommen. Dieser Ausdruck, insbesondere die erste Summe im Exponenten,

$$\sigma \Delta t^\beta \sum_{k=1}^{N_t} \phi_k$$

hat es dann nahegelegt, Erwartungswerte von der folgenden Form zu betrachten:

$$\mathbb{E} \left[f \left(\Delta t^\beta \sum_{k=1}^{N_t} \phi_k \right) \right] = \int_{\mathbb{R}^{N_t}} f \left(\Delta t^\beta \sum_{k=1}^{N_t} \phi_k \right) \prod_{k=1}^{N_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\phi_k^2}{2}} d\phi_k \quad (3)$$

Für festes $t = N\Delta t$, $N = N_t = t/\Delta t$, bekommt man da im Limes $\Delta t \rightarrow 0$ ein unendlich-dimensionales Integral, also es ist keineswegs klar, inwieweit man da einen sinnvollen Limes erhalten kann. Um das zu analysieren, hatten wir dann die folgende, sehr wichtige Variablensubstitution gemacht:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\Delta t} \phi_1 & \phi_1 &= x_1/\sqrt{\Delta t} \\ x_2 &= \sqrt{\Delta t} (\phi_1 + \phi_2) & \phi_2 &= (x_2 - x_1)/\sqrt{\Delta t} \\ x_3 &= \sqrt{\Delta t} (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) & \Leftrightarrow \phi_3 &= (x_3 - x_2)/\sqrt{\Delta t} \\ &\vdots & &\vdots \\ x_{N_t} &= \sqrt{\Delta t} (\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_{N_t}) & \phi_{N_t} &= (x_{N_t} - x_{N_t-1})/\sqrt{\Delta t} \end{aligned} \quad (4)$$

Die Funktionaldeterminante, die man dann bei der Transformationsformel für N -dimensionale Integrale bekommt, war, mit $N = N_t$,

$$\det \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}^N},$$

das hatten wir auch schon berechnet. Damit konnten wir dann die folgende Rechnung machen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[f \left(\Delta t^\beta \sum_{k=1}^N \phi_k \right) \right] &= \int_{\mathbb{R}^N} f \left(\Delta t^{\beta-\frac{1}{2}} \sqrt{\Delta t} \sum_{k=1}^N \phi_k \right) \prod_{k=1}^N \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\phi_k^2}{2}} \right\} d\phi_1 \cdots d\phi_N \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f \left(\Delta t^{\beta-\frac{1}{2}} x_N \right) \prod_{k=1}^N \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2\Delta t}} \right\} \det \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right] dx_1 \cdots dx_N \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f \left(\Delta t^{\beta-\frac{1}{2}} x_N \right) \prod_{k=1}^N \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\frac{(x_{k-1} - x_k)^2}{2\Delta t}} \right\} dx_1 \cdots dx_N \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f \left(\Delta t^{\beta-\frac{1}{2}} x_N \right) \prod_{k=1}^N \left\{ p_{\Delta t}(x_{k-1}, x_k) dx_k \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

In der letzten Zeile haben wir abgekürzt:

$$p_\tau(x, y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\tau}} \quad (6)$$

und haben neben den neuen Integrationsvariablen x_1, \dots, x_N noch ein x_0 definiert,

$$x_0 := 0$$

damit wir das $p_{\Delta t}(x_{k-1}, x_k)$ für $k = 1$ nicht gesondert hinschreiben müssen. Diese $p_{\Delta t}(x_{k-1}, x_k)$'s haben jetzt die folgende sehr schöne Eigenschaft:

Lemma 4.1: Let $p_t(x, y)$ be given by (6). Then

$$\int_{\mathbb{R}} p_s(x, y) p_t(y, z) dy = p_{s+t}(x, z) \quad (7)$$

Also, $\int_{\mathbb{R}} p_s(x, y) dy = 1$.

Proof: Schauen wir uns gleich mal in den Lösungen zum Übungsblatt 5 an. ■

Using this lemma, we can actually perform the integrals over x_1, x_2, \dots, x_{N-1} . We have

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}} dx_2 \cdots \int_{\mathbb{R}} dx_{N-1} \underbrace{p_{\Delta t}(x_0, x_1) p_{\Delta t}(x_1, x_2)}_{\int dx_1 \rightarrow p_{2\Delta t}(x_0, x_2)} p_{\Delta t}(x_2, x_3) \cdots p_{\Delta t}(x_{N-1}, x_N) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx_2 \int_{\mathbb{R}} dx_3 \cdots \int_{\mathbb{R}} dx_{N-1} \underbrace{p_{2\Delta t}(x_0, x_2) p_{\Delta t}(x_2, x_3)}_{\int dx_2 \rightarrow p_{3\Delta t}(x_0, x_3)} \cdots p_{\Delta t}(x_{N-1}, x_N) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx_3 \cdots \int_{\mathbb{R}} dx_{N-1} p_{3\Delta t}(x_0, x_3) \cdots p_{\Delta t}(x_{N-1}, x_N) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx_{N-1} p_{(N-1)\Delta t}(x_0, x_{N-1}) p_{\Delta t}(x_{N-1}, x_N) \\ &= p_{N\Delta t}(x_0, x_N) \end{aligned}$$

Thus (5) simplifies to

$$\mathbb{E} \left[f \left(\Delta t^\beta \sum_{k=1}^{N_t} \phi_k \right) \right] = \int_{\mathbb{R}^N} f(\Delta t^{\beta-\frac{1}{2}} x_N) \prod_{k=1}^N \left\{ p_{\Delta t}(x_{k-1}, x_k) dx_k \right\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} f(\Delta t^{\beta-\frac{1}{2}} x_N) \times p_{N\Delta t}(x_0, x_N) dx_N \\ &\stackrel{\substack{N\Delta t=t \\ x_0=0}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(\Delta t^{\beta-\frac{1}{2}} x) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \end{aligned} \quad (9)$$

Hence, a nontrivial meaningful limit is obtained only for $\beta = \frac{1}{2}$.

Instead of labelling the x with $k \in \{1, 2, \dots, N_t\}$, we label them with $t_k := k\Delta t$ which has the meaning of time. In particular, $t_N = N\Delta t = t$. So, we rename $x_k \rightarrow x_{k\Delta t} = x_{t_k}$. With that, we write down the following very important

Definition 4.1: Let $N_T = T/\Delta t$ and $p_t(x, y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$. Then the measure

$$dW(\{x_t\}_{0 < t \leq T}) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \prod_{k=1}^{N_T} p_{\Delta t}(x_{(k-1)\Delta t}, x_{k\Delta t}) dx_{k\Delta t} \quad (10)$$

is called the Wiener measure and the family of random variables or integration variables $\{x_t\}_{0 < t \leq T}$ is called a Brownian motion. In terms of i.i.d. random variables $\phi_k \in \mathcal{N}(0, 1)$,

$$x_t := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\Delta t} \sum_{k=1}^{t/\Delta t} \phi_k \quad (11)$$

Remark: The time discretized version of the Wiener measure, this is what we actually will usually use, is simply given by a product of Gaussian normal distributions. With $N = N_T = T/\Delta t$ and $t_k = k\Delta t$,

$$\begin{aligned}
dW(\{x_{t_k}\}_{0 < k \leq N}) &= \prod_{k=1}^N p_{\Delta t}(x_{t_{k-1}}, x_{t_k}) dx_{t_k} \\
&= \prod_{k=1}^N \left\{ e^{-\frac{(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})^2}{2\Delta t}} \frac{dx_{t_k}}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \right\} \\
&= \prod_{k=1}^N \left\{ e^{-\frac{\phi_k^2}{2}} \frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}} \right\}
\end{aligned} \tag{12}$$

And the time discretized Brownian motion x_{t_k} is given by

$$x_{t_k} = \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j \tag{13}$$

from which we get the recursion

$$x_{t_k} = x_{t_{k-1}} + \sqrt{\Delta t} \phi_k \tag{14}$$

The formulae (12,13,14) are very important and will be used over and over again. Integrals with respect to the Wiener measure are computed according to the following theorem, which also will be used over and over again.

Theorem 4.1: Let $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ be some function and let $0 =: t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq T$. Then

$$\int F(x_{t_1}, \dots, x_{t_m}) dW(\{x_t\}_{0 < t \leq T}) = \int_{\mathbb{R}^m} F(x_{t_1}, \dots, x_{t_m}) \prod_{\ell=1}^m p_{t_\ell - t_{\ell-1}}(x_{t_{\ell-1}}, x_{t_\ell}) dx_{t_\ell} \tag{15}$$

Proof: Because of (7) only the x_{t_1}, \dots, x_{t_m} integration variables survive:

$$\begin{aligned}
&\int F(x_{t_1}, \dots, x_{t_m}) dW(\{x_t\}_{0 < t \leq T}) \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{N_T}} F(x_{t_1}, \dots, x_{t_m}) \prod_{k=1}^{N_T} p_{\Delta t}(x_{(k-1)\Delta t}, x_{k\Delta t}) dx_{k\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{N_T}} F(x_{t_1}, \dots, x_{t_m}) \prod_{k=1}^{N_{t_1}} p_{\Delta t}(\dots) dx_{k\Delta t} \prod_{k=N_{t_1}+1}^{N_{t_2}} p_{\Delta t}(\dots) dx_{k\Delta t} \times \dots \\
&\quad \dots \times \prod_{k=N_{t_{m-1}}+1}^{N_{t_m}} p_{\Delta t}(\dots) dx_{k\Delta t} \\
&\stackrel{(7)}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} F(x_{t_1}, \dots, x_{t_m}) p_{t_1}(x_0, x_{t_1}) dx_{t_1} p_{t_2 - t_1}(x_{t_1}, x_{t_2}) dx_{t_2} \times \dots \\
&\quad \dots \times p_{t_m - t_{m-1}}(x_{t_{m-1}}, x_{t_m}) dx_{t_m} \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} F(x_{t_1}, \dots, x_{t_m}) \prod_{\ell=1}^m p_{t_\ell - t_{\ell-1}}(x_{t_{\ell-1}}, x_{t_\ell}) dx_{t_\ell}
\end{aligned} \tag{16}$$

which coincides with (15). ■

Now we return to (2) and put $\beta = \frac{1}{2}$. Then

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{k=1}^{N_t} \phi_k - \frac{\sigma^2}{2} \Delta t \sum_{k=1}^{N_t} \phi_k^2 + O(\sqrt{\Delta t}) \right\} \quad (17)$$

The first term in the exponent converges to a Brownian motion $x_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\Delta t} \sum_{k=1}^{N_t} \phi_k$ and the last term vanishes, but what about the second term? There is the following

Theorem 4.2: Let

$$I_{\Delta t} := \Delta t \sum_{k=1}^{N_t} \phi_k^2$$

with $N_t = t/\Delta t$ and ϕ_1, ϕ_2, \dots being independent Gaussian random numbers with mean 0 and standard deviation 1. Then the following statements hold:

- a) $E[I_{\Delta t}] = t$
- b) $V[I_{\Delta t}] = 2t \Delta t$
- c) $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \text{Prob} \left[|I_{\Delta t} - t| \geq \varepsilon \right] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 .$

More intuitively, we may rewrite the statement of part (c) simply as

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \sum_{k=1}^{N_t} \phi_k^2 = t .$$

Proof: ..machen wir am Dienstag.