Hochschule RheinMain
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim

Die Grundidee

der

Optionspreisbewertung

Grundidee der Optionspreisbewertung

Hochschule RheinMain
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim

- Was ist ein Derivat oder eine Option ?

- Rein mathematisch gesprochen: Eine Option auf einen Basiswert S_t (etwa eine Aktie) mit Fälligkeitsdatum T ist eine beliebige Auszahlungs-Funktion $f(S_T)$.

  Der Käufer der Option f bekommt bei Fälligkeit $t = T$ den Betrag $f(S_T)$ vom Optionsverkäufer ausbezahlt.

Ein einfaches Beispiel:

- Wir betrachten eine Aktie mit einem Zeithorizont von 1 Woche:

$t = 0$ $t = T = 1$ Woche

$p = 60\%$ $S_T = 105$

$S_0 = 100$

$1\text{-}p = 40\%$ $S_T = 95$

Ein einfaches Beispiel:

- Standard-Kauf-Option: $f(S_T) := \max\{ S_T - S_0 , 0 \}$

t = 0		t = T = 1 Woche	Auszahlung der Option:
	p = 60%	$S_T = 105$	$5 = \max\{ 105 - 100 , 0 \}$
$S_0 = 100$			
	1-p = 40%	$S_T = 95$	$0 = \max\{ 95 - 100 , 0 \}$

Ein einfaches Beispiel:

Hochschule RheinMain
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim

- Standard-Kauf-Option: $f(S_T) := \max\{ S_T - S_0 , 0 \}$

$$
\begin{array}{llll}
t = 0 & & t = T = 1 \text{ Woche} & \text{Auszahlung der Option:} \\
 & \xrightarrow{p = 60\%} & S_T = 105 & 5 = \max\{ 105 - 100 , 0 \} \\
S_0 = 100 & & & \\
 & \xrightarrow{1-p = 40\%} & S_T = 95 & 0 = \max\{ 95 - 100 , 0 \}
\end{array}
$$

- FRAGE: Was würden Sie dafür bei $t = 0$ bezahlen?

Ein einfaches Beispiel:

- Man könnte meinen:

  Optionspreis = 60% * 5 Euro + 40% * 0 Euro = 3 Euro .

- Das ist falsch, wie wir gleich sehen werden. Nehmen wir an, das wäre richtig. Es könnte folgendes passieren:

  Ein grosser Investor möchte 1 Million von diesen Optionen bei einer Bank kaufen. Die Bank bekäme also bei t = 0 3 Millionen Euro.

  Die Zeit von 1 Woche vergeht und die Aktie ist entweder gestiegen oder gefallen.

Ein einfaches Beispiel:

- Ist die Aktie gefallen, müsste die Bank nichts an den Investor zahlen und hätte auf einen Schlag 3 Mio Gewinn gemacht.
- Ist die Aktie jedoch gestiegen, müsste die Bank 5 Mio an den Investor zahlen und hätte auf einen Schlag 2 Mio Verlust gemacht.

- Derartige Risiken wollen Banken nicht eingehen. Sondern, ähnlich wie ein Autohändler, möchte eine Bank ein paar Prozent Gewinn pro verkaufter Option machen, egal, ob die zu Grunde liegende Aktie steigt oder fällt.
- Es ist ein fundamentales Resultat der Finanzmathematik, dass das tatsächlich möglich ist. Und zwar muss die Bank dazu in diesem Beispiel folgendes machen:

Ein einfaches Beispiel:

Hochschule RheinMain
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim

- Als Optionspreis muss sie nur 2,50 Euro verlangen (also keine 3 Euro).
- Dann muss die Bank bei t = 0 eine halbe Aktie kaufen.
- Bei Fälligkeit der Option bei t = T = 1 Woche muss die Bank diese halbe Aktie dann wieder verkaufen:

BankPortfolio_heute = 2,50 = 2,50 – 50 + 50
= -47,50(cash) + halbe Aktie

105/2 = -47,50+52,50 = 5 Euro
BankPortfolio_1Woche = -47,50(cash) +
95/2 = -47,50+47,50 = 0 Euro

Also: BankPortfolio_1Woche = option_payoff

Ein einfaches Beispiel:

Hochschule RheinMain
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim

- Also: Mit der Handelsstrategie “Kaufe eine halbe Aktie” ist die Bank in der Lage, den option payoff exakt zu replizieren.
- Der **faire Preis einer Option** ist dann das Geld, das man braucht, um eine replizierende Strategie aufsetzen zu können.
- In dem Beispiel wären das also nur **2,50 Euro** .
- Der tatsächliche Preis einer Option ist dann vielleicht 2,55 Euro oder 2,53 Euro oder 2,52 Euro...

- Wenn man diese Idee in einem entsprechenden mathematischen Modell formalisiert, was tatsaechlich von Banken angewendet werden kann, sieht das folgendermassen aus (the most sophisticated version with stochastic volatility and stochastic interest rates, Kapitel 18 Finanzmathematik II):

A Realistic Model with Stoch Vol and Stochastic Rates:

Theorem: Suppose that the real world (not risk neutral) processes for some stock S_t, variance ν_t and short term interest rate r_t are given by

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \mu\, dt + \sqrt{\nu_t}\, dB_t^S \\ d\nu_t &= \alpha(\nu_t, t)\, dt + \beta \sqrt{\nu_t}\, dB_t^\nu \\ dr_t &= m(r_t, t)\, dt + \sigma\, dB_t^r \end{aligned} \tag{52}$$

with correlations

$$\begin{aligned} dB^S \cdot dB^\nu &= \rho_{S,\nu}\, dt \\ dB^S \cdot dB^r &= \rho_{S,r}\, dt \\ dB^\nu \cdot dB^r &= \rho_{\nu,r}\, dt \end{aligned} \tag{53}$$

Let $H = H(S_T)$ be the payoff of some derivative which is to be priced and let

$$v_t = v_0 + \int_0^t \delta_u\, ds_u + \int_0^t \eta_u\, dc_u + \int_0^t \rho_u\, dp_u \tag{54}$$

be the discounted time t value of a self financing strategy which holds at time u δ_u stocks, η_u plain vanilla options $C(S_u, \nu_u, r_u, u)$ and ρ_u zero bonds $P(r_u, u)$. Then the following statements hold:

A Realistic Model with Stoch Vol and Stochastic Rates:

a) If the hedge instruments P and C are consistently priced in the model (52), then the functions

$$\tilde{m}(r,t) := -\frac{\frac{\sigma^2}{2}P_{rr}+P_t-rP}{P_r} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(S,\nu,r,t) :=& -\frac{rSC_S+\tilde{m}C_r+\frac{1}{2}(S^2\nu C_{SS}+\beta^2\nu C_{\nu\nu}+\sigma^2 C_{rr})}{C_\nu} \\ & - \frac{\beta\nu S\rho_{S,\nu}C_{S\nu}+\sqrt{\nu}\sigma S\rho_{S,r}C_{Sr}+\beta\sqrt{\nu}\sigma\rho_{\nu,r}C_{\nu r}+C_t-rC}{C_\nu}\end{aligned} \tag{56}$$

have to be some universal functions independent of the particular choice of P and C.

b) Define the differential operator (for some function $V = V(S,\nu,r,t)$)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{risk neutral}}V :=& \; rSV_S+\tilde{\alpha}V_\nu+\tilde{m}V_r+\tfrac{1}{2}\big(S^2\nu V_{SS}+\beta^2\nu V_{\nu\nu}+\sigma^2 V_{rr}\big) \\ & +\beta\nu S\rho_{S,\nu}V_{S\nu}+\sqrt{\nu}\sigma S\rho_{S,r}V_{Sr}+\beta\sqrt{\nu}\sigma\rho_{\nu,r}V_{\nu r}+V_t-rV\end{aligned} \tag{57}$$

Suppose that V is a solution of the PDE

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{risk neutral}}V &= 0 \\ V(S,\nu,r,T) &= H(S_T)\end{aligned} \tag{58}$$

A Realistic Model with Stoch Vol and Stochastic Rates:

and define

$$\begin{aligned} \eta &:= \tfrac{V_\nu}{C_\nu} && (59)\\ \delta &:= V_S - \eta C_S && (60)\\ \rho &:= \tfrac{V_r}{P_r} - \eta \tfrac{C_r}{P_r} && (61) \end{aligned}$$

Then (54) is in fact a replicating strategy for H. That is,

$$V(S,\nu,r,0) + \int_0^T \delta_t\, ds_t + \int_0^T \eta_t\, dc_t + \int_0^T \rho_t\, dp_t \;=\; e^{-\int_0^T r_t dt} H(S_T) \qquad (62)$$

where

$$\begin{aligned} s_t &= e^{-\int_0^T r_t dt}\, S_t \\ c_t &= e^{-\int_0^T r_t dt}\, C(S_t,\nu_t,r_t,t) && (63)\\ p_t &= e^{-\int_0^T r_t dt}\, P(r_t,t) \end{aligned}$$

and (62) holds for all real world processes S_t, ν_t and r_t which are given by (52) (and which are to be substituted on the right hand side of (63)). In particular, the option price

$$\text{option price} \;=\; V(S,\nu,r,0) \qquad (64)$$

given by the solution of (58,69), is independent of μ, m and α but only depends on $\tilde{m}, \tilde{\alpha}$ and the vol and correlation parameters.

A Realistic Model with Stoch Vol and Stochastic Rates:

c) Let

$$H = H\big(\{S_t, r_t\}_{0\le t\le T}\big) \tag{65}$$

be the payoff of some exotic option. Then the price of this option is given by

$$\text{price}(H) \;=\; \tilde{\mathsf{E}}\Big[e^{-\int_0^T \tilde{r}_t dt}\, H\big(\{\tilde{S}_t, \tilde{r}_t\}_{0\le t\le T}\big)\Big] \tag{66}$$

where $(\tilde{S}_t, \tilde{\nu}_t, \tilde{r}_t)$ are given by the risk neutral SDE system

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} &= \tilde{r}_t\, dt + \sqrt{\tilde{\nu}_t}\, d\tilde{B}_t^S \\ d\tilde{\nu}_t &= \tilde{\alpha}(\tilde{\nu}_t, t)\, dt + \beta\sqrt{\tilde{\nu}_t}\, d\tilde{B}_t^\nu \\ d\tilde{r}_t &= \tilde{m}(\tilde{r}_t, t)\, dt + \sigma\, d\tilde{B}_t^r \end{aligned} \tag{67}$$

with correlated Brownian motions

$$\begin{aligned} d\tilde{B}^S \cdot d\tilde{B}^\nu &= \rho_{S,\nu}\, dt \\ d\tilde{B}^S \cdot d\tilde{B}^r &= \rho_{S,r}\, dt \\ d\tilde{B}^\nu \cdot d\tilde{B}^r &= \rho_{\nu,r}\, dt \end{aligned} \tag{68}$$

Here $\tilde{m}$ and $\tilde{\alpha}$ are the universal functions (55,56).