Kapitel 8: Stochastic Calculus und Payoff Replication im Black-Scholes Modell, Teil2

Nach den Vorbereitungen vom letzten Mal können wir jetzt ohne grössere Umschweife das folgende konzeptionell sehr wichtige Theorem 8.5 formulieren, das also sagt, dass im Black-Scholes Modell immer noch jede (europäische, pfadunabhängige) Option durch eine geeignete Handelsstrategie repliziert werden kann:

Theorem 8.5: Let $H = H(S)$ be some option payoff and let $V = V(S,t)$ be a solution of the Black-Scholes PDE

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV &= 0 \\ V(S,T) &= H(S) \end{aligned}$$

and let $\{S_t\}_{t\geq 0}$ be a stochastic price process given by the Black-Scholes Modell with real world drift μ,

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dx_t$$

Furthermore let $V_0 = V(S_0, 0)$ be the option price of H and define a trading strategy by the following delta's,

$$\delta_t = \delta(S_t, t) := \frac{\partial V(S_t,t)}{\partial S_t}$$

As usual, we use the notation with small letters

$$s_t := e^{-rt} S_t$$

for the discounted price process. Then the following equation holds:

$$e^{-rT} H(S_T) = V_0 + \int_0^T \delta_t\, ds_t$$

This equation means (recall part (b) of Theorem 1.1 in the first chapter) that in the Black-Scholes model any option payoff $H = H(S_T)$ can be replicated with a suitable trading strategy.

Proof: Let

$$v(S,t) := e^{-rt}\, V(S,t)$$

Then, since $v_0 = V_0$,

$$e^{-rT} H(S_T) \; - \; V_0 \;=\; v(S_T, T) \; - \; v(S_0, 0)$$
$$= \int_0^T dv$$

where

$$dv \;=\; d\big(e^{-rt} V\big)$$
$$= d(e^{-rt})\, V \;+\; e^{-rt}\, dV \;+\; d(e^{-rt})\, dV$$
$$= -r\, e^{-rt}\, dt\, V \;+\; e^{-rt}\, dV \;+\; 0$$

Now,

$$dV \;=\; \frac{\partial V}{\partial S}\, dS_t \;+\; \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS_t)^2 \;+\; \frac{\partial V}{\partial t}\, dt$$

Using

$$\delta_t \;=\; \frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t)$$

and, recalling the calculation rules for Brownian motion $(dx_t)^2 = dt$ and $dx_t\, dt = (dt)^2 = 0$,

$$\begin{aligned}(dS_t)^2 &= (\mu\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dx_t)^2 \\ &= 0 + 0 + \sigma^2\, S_t^2\, (dx_t)^2 \\ &= \sigma^2\, S_t^2\, dt\end{aligned}$$

we obtain

$$dV \;=\; \delta_t\, dS_t \;+\; \left\{\frac{\sigma^2}{2} S_t^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \;+\; \frac{\partial V}{\partial t}\right\} dt$$

We have to express dS_t through ds_t where $s_t = e^{-rt}\, S_t$. We have

$$\begin{aligned}ds_t &= d(e^{-rt} S_t) \\ &= -r\, e^{-rt}\, dt\, S_t \;+\; e^{-rt}\, dS_t\end{aligned}$$

or

$$e^{-rt}\, dS_t \;=\; ds_t \;+\; r\, e^{-rt}\, dt\, S_t$$

which gives

$$\begin{aligned}e^{-rt}\, dV &= \delta_t\, e^{-rt}\, dS_t \;+\; e^{-rt}\left\{\frac{\sigma^2}{2} S_t^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \;+\; \frac{\partial V}{\partial t}\right\} dt \\ &= \delta_t\, \big[ds_t \;+\; r\, e^{-rt}\, dt\, S_t\big] \;+\; e^{-rt}\left\{\frac{\sigma^2}{2} S_t^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \;+\; \frac{\partial V}{\partial t}\right\} dt \\ &= \delta_t\, ds_t \;+\; r S_t \frac{\partial V}{\partial S}\, dt \;+\; e^{-rt}\left\{\frac{\sigma^2}{2} S_t^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \;+\; \frac{\partial V}{\partial t}\right\} dt\end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} dv &= -r\,e^{-rt}\,dt\,V \;+\; e^{-rt}\,dV \\ &= -r\,e^{-rt}\,dt\,V \;+\; \delta_t\,ds_t \;+\; rS_t\frac{\partial V}{\partial S}\,dt \;+\; e^{-rt}\Big\{\frac{\sigma^2}{2}S_t^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \;+\; \frac{\partial V}{\partial t}\Big\}\,dt \\ &= \delta_t\,ds_t \;+\; e^{-rt}\Big\{\frac{\sigma^2}{2}S_t^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \;+\; rS_t\frac{\partial V}{\partial S} \;+\; \frac{\partial V}{\partial t} \;-\; rV\Big\}\,dt \\ &= \delta_t\,ds_t \end{aligned}$$

where we used the Black-Scholes PDE in the last line. Thus,

$$\begin{aligned} e^{-rT}H(S_T) \;-\; V_0 &= v(S_T,T) \;-\; v(S_0,0) \\ &= \int_0^T dv \\ &= \int_0^T \delta_t\,ds_t \end{aligned}$$

and the theorem is proven. ■

Excel/VBA-Simulation: Wir wollen jetzt die Aussage von Theorem 8.5 durch eine geeignete Excel/VBA-Simulation verifizieren. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass die Zinsen 0 sind, dann müssen wir also nicht zwischen diskontierten und undiskontierten Grössen unterscheiden, wir haben $s_t = S_t$. Weiterhin wollen wir eine standard Call-Option mit payoff

$$H_{\rm call} \;=\; \max\{\,S_T - K\,,\,0\,\}$$

betrachten, für die wir sowohl für den Preis als auch für das Delta bereits eine analytische Formel hergeleitet haben, im Kapitel 6. Und zwar hatten wir

$$V_{{\rm call},t} \;=\; S_t\,N(d_+) \;-\; K\,e^{-r(T-t)}\,N(d_-)$$

mit

$$d_\pm \;:=\; \frac{\log\frac{S_t}{K} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

und die Formel für das Delta δ_t zur Zeit t war einfach

$$\delta_{\rm call} \;=\; N(d_+)$$

Ok, machen wir jetzt die Implementation: Wir müssen die Grösse

$$V(t_N) \;=\; V_0 \;+\; \sum_{k=1}^{N} \delta(t_{k-1}) \times \big(\,S_{t_k} \;-\; S_{t_{k-1}}\,\big)$$

berechnen mit

$$\delta(t_j) \;=\; N\big[\,d_+(t_j)\,\big]$$

und

$$d_+(t_j) \;:=\; \frac{\log \frac{S_{t_j}}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(t_N - t_j)}{\sigma\sqrt{t_N - t_j}}$$

und dann sollte in etwa gelten (exakt im Limes $\Delta t \to 0$)

$$V(t_N) \;\approx\; H(S_{t_N}) \;=\; \max\{\, S_{t_N} - K \,,\, 0\,\}$$

für beliebige Black-Scholes Pfade gegeben durch

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}} \big(\, 1 \,+\, \mu\Delta t \,+\, \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \,\big)$$

Man beachte, dass diese Pfade einen beliebigen real world Drift μ haben können, da muss nicht der Zinssatz r stehen, den wir hier ja auf 0 setzen wollen. Das μ ist also ein weiterer Input-Parameter für die Excel-Simulation.