week12b: Kapitel 7: Die Black-Scholes PDE, Teil2

Letztes Mal hatten wir die Black-Scholes PDE für den Fall Zinsen $r = 0$ hergeleitet, jetzt wollen wir noch die Zinsen $r \neq 0$ mit dazu nehmen. Die Black-Scholes PDE lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV &= 0 \qquad (1) \\ V(S, t = T) &= H(S) \end{aligned}$$

wobei $H = H(S_T)$ die Optionsauszahlung bei Fälligkeit T der Option ist und S_T der Underlyingpreis zur Zeit T. Wir benutzten exakt dieselbe Logik wie beim letzten Mal und approximieren das Black-Scholes Modell mit einem Binomialmodell mit Returns

$$\begin{aligned} \mathrm{ret}_{\mathrm{up}} &= \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \qquad (2) \\ \mathrm{ret}_{\mathrm{down}} &= \mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t} \qquad (3) \end{aligned}$$

Die Pricing-Formeln aus dem week2b.pdf für das Binomialmodell sahen dann folgendermassen aus:

$$v_k = w_{\mathrm{up}}\, v_{k+1}^{\mathrm{up}} + w_{\mathrm{down}}\, v_{k+1}^{\mathrm{down}} \qquad (4)$$

mit diskontierten Portfoliowerten v_k gegeben durch (mit $t_k = k\Delta t$)

$$v_k = (1 + r\Delta t)^{-k} V_k = \Big(1 + \tfrac{rt_k}{k}\Big)^{-k} V_k \overset{\Delta t \to 0}{=} e^{-rt_k}\, V_k$$

und mit Gewichten oder risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten ($\Delta t := t_k - t_{k-1}$)

$$w_{\mathrm{up}} = \frac{r\Delta t - \mathrm{ret}_{\mathrm{down}}}{\mathrm{ret}_{\mathrm{up}} - \mathrm{ret}_{\mathrm{down}}} \qquad (5)$$

$$w_{\mathrm{down}} = 1 - w_{\mathrm{up}} = \frac{\mathrm{ret}_{\mathrm{up}} - r\Delta t}{\mathrm{ret}_{\mathrm{up}} - \mathrm{ret}_{\mathrm{down}}} \qquad (6)$$

Die $v_{k+1}^{\mathrm{up/down}}$ waren die diskontierten Versionen von

$$\begin{aligned} V_{k+1}^{\mathrm{up/down}} &:= V_{k+1}\big(S_{k+1}^{\mathrm{up/down}}\big) \\ S_{k+1}^{\mathrm{up/down}} &:= S_k\,(1 + \mathrm{ret}_{\mathrm{up/down}}) \end{aligned}$$

und die replizierende Strategie, die δ's, waren gegeben durch

$$\delta_k \;=\; \delta_k(S_k) \;=\; \frac{V_{k+1}^{\text{up}} \,-\, V_{k+1}^{\text{down}}}{S_{k+1}^{\text{up}} \,-\, S_{k+1}^{\text{down}}} \tag{7}$$

Die Rekursion startet bei $k = N$ mit diskontierter Optionsauszahlung

$$v_N \;:=\; e^{-rt_N}\, H(S_0, \cdots, S_N) \;.$$

Betrachten wir jetzt also den Fall $r \neq 0$. Die Gewichte sehen folgendermassen aus:

$$w_{\text{up}} \;=\; \frac{r\Delta t \,-\, \text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} \,-\, \text{ret}_{\text{down}}}$$
$$w_{\text{down}} \;=\; \frac{\text{ret}_{\text{up}} \,-\, r\Delta t}{\text{ret}_{\text{up}} \,-\, \text{ret}_{\text{down}}}$$

oder

$$w_{\text{up}} \;=\; \frac{r\Delta t \,-\, \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \;=\; \frac{1}{2} \,+\, \frac{(r-\mu)\Delta t}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{8}$$
$$w_{\text{down}} \;=\; \frac{\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} - r\Delta t}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \;=\; \frac{1}{2} \,-\, \frac{(r-\mu)\Delta t}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{9}$$

Die Rekursion (22) liest sich dann folgendermassen:

$$\begin{aligned} v_{t_k} \;&=\; w_{\text{up}}\, v_{t_{k+1}}^{\text{up}} \,+\, w_{\text{down}}\, v_{t_{k+1}}^{\text{down}} \\ &=\; \frac{v_{t_{k+1}}^{\text{up}} + v_{t_{k+1}}^{\text{down}}}{2} \,+\, (r-\mu)\Delta t\, \frac{v_{t_{k+1}}^{\text{up}} - v_{t_{k+1}}^{\text{down}}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{aligned} \tag{10}$$

Um auf die undiskontierten grossen V_t's zu kommen, multiplizieren wir die linke und die rechte Seite von (10) mit $e^{rt_{k+1}}$ und erhalten

$$e^{r(t_{k+1}-t_k)}\, V_{t_k} \;=\; \frac{V_{t_{k+1}}^{\text{up}} + V_{t_{k+1}}^{\text{down}}}{2} \,+\, (r-\mu)\Delta t\, \frac{V_{t_{k+1}}^{\text{up}} - V_{t_{k+1}}^{\text{down}}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{11}$$

Jetzt können wir im wesentlichen so weitermachen wie beim letzten Mal: Wir ziehen auf beiden Seiten von (11) den Term $V_{t_{k+1}}(S_{t_k})$ ab,

$$\begin{aligned} e^{r\Delta t}\, V_{t_k}(S_{t_k}) - V_{t_{k+1}}(S_{t_k}) \;&=\; \frac{V_{t_{k+1}}^{\text{up}} + V_{t_{k+1}}^{\text{down}}}{2} \,+\, (r-\mu)\Delta t\, \frac{V_{t_{k+1}}^{\text{up}} - V_{t_{k+1}}^{\text{down}}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \,-\, V_{t_{k+1}}(S_{t_k}) \\ &=\; \frac{V_{t_{k+1}}^{\text{up}} \,-\, 2V_{t_{k+1}}(S_{t_k}) \,+\, V_{t_{k+1}}^{\text{down}}}{2} \,+\, (r-\mu)\Delta t\, \frac{V_{t_{k+1}}^{\text{up}} - V_{t_{k+1}}^{\text{down}}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{aligned}$$

und schreiben die linke Seite der obigen Gleichung noch ein kleines bischen um:

$$
\begin{aligned}
e^{r\Delta t}\, V_{t_k}(S_{t_k}) - V_{t_{k+1}}(S_{t_k}) \;&=\; (e^{r\Delta t}-1)\, V_{t_k}(S_{t_k}) \;+\; V_{t_k}(S_{t_k}) - V_{t_{k+1}}(S_{t_k}) \\
&= \frac{V^{\mathrm{up}}_{t_{k+1}} \;-\; 2V_{t_{k+1}}(S_{t_k}) \;+\; V^{\mathrm{down}}_{t_{k+1}}}{2} \;+\; (r-\mu)\Delta t\, \frac{V^{\mathrm{up}}_{t_{k+1}} - V^{\mathrm{down}}_{t_{k+1}}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}}
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung teilen wir dann noch durch Δt und bekommen

$$
\begin{aligned}
&\frac{e^{r\Delta t}-1}{\Delta t}\; V_{t_k}(S_{t_k}) \;+\; \frac{V_{t_k}(S_{t_k}) - V_{t_{k+1}}(S_{t_k})}{\Delta t} \\
&= \frac{V^{\mathrm{up}}_{t_{k+1}} \;-\; 2V_{t_{k+1}}(S_{t_k}) \;+\; V^{\mathrm{down}}_{t_{k+1}}}{2\Delta t} \;+\; (r-\mu)\; \frac{V^{\mathrm{up}}_{t_{k+1}} - V^{\mathrm{down}}_{t_{k+1}}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \\
&=: \;\; \mathrm{term}_1 \;+\; \mathrm{term}_2
\end{aligned} \tag{12}
$$

Mit den Resultaten vom letzten Mal können wir jetzt sofort den Limes $\Delta t \to 0$ hinschreiben. Für term_1 hatten wir letztes Mal das folgende Resultat hergeleitet:

$$
\mathrm{term}_1 \;\; \overset{\Delta t \to 0}{\to} \;\; \frac{\sigma^2 S_{t_k}^2}{2}\, \frac{\partial^2 V}{(\partial S_{t_k})^2} \;+\; \mu\, S_{t_k}\, \frac{\partial V}{\partial S_{t_k}} \tag{13}
$$

Und für term_2, der kommt hier jetzt mit dem Vorfaktor $r-\mu$ anstatt nur mit einem $-\mu$, hatten wir bekommen

$$
\mathrm{term}_2 \;\; \overset{\Delta t \to 0}{\to} \;\; (r-\mu)\, S_{t_k}\, \frac{\partial V}{\partial S_{t_k}} \tag{14}
$$

Und die linke Seite von (12) konvergiert offensichtlich gegen

$$
\frac{e^{r\Delta t}-1}{\Delta t}\; V_{t_k}(S_{t_k}) \;+\; \frac{V_{t_k}(S_{t_k}) - V_{t_{k+1}}(S_{t_k})}{\Delta t} \;\; \overset{\Delta t \to 0}{\to} \;\; r\; V_{t_k}(S_{t_k}) \;-\; \frac{\partial V}{\partial t}(S_{t_k}, t_k) \tag{15}
$$

Also wenn wir das alles in Gleichung (12) einsetzen, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
r\,V \;-\; \frac{\partial V}{\partial t} \;&=\; \frac{\sigma^2 S^2}{2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \;+\; \mu\, S\, \frac{\partial V}{\partial S} \;+\; (r-\mu)\, S\, \frac{\partial V}{\partial S} \\
&= \frac{\sigma^2 S^2}{2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \;+\; r\, S\, \frac{\partial V}{\partial S}
\end{aligned} \tag{16}
$$

und das ist offensichtlich äquivalent zur Black-Scholes PDE (1).

Beispiel 1: Schauen wir uns noch ein kleines Beispiel an: In letzten Kapitel 6 hatten wir die Preise und Sensitivitäten von Standard-Call- und Put-Optionen hergeleitet. Verifizieren Sie mit Hilfe dieser Formeln für den Fall Zinsen gleich null, $r = 0$, dass die Black-Scholes PDE erfüllt ist (für $r \neq 0$ ist die Black-Scholes PDE natürlich auch erfüllt, aber die Rechnung hat dann ein paar mehr Terme).

Lösung: Die $r = 0$ Black-Scholes PDE lautet

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \tag{17}$$

Mit den Greeks aus dem week11b.pdf können wir die Gleichung (17) auch folgendermassen schreiben:

$$\theta + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \gamma = 0$$

Für Zinsen $r = 0$ reduzieren sich die Greeks aus dem Theorem 6.1 (das war das Theorem mit den Black-Scholes Formeln, ebenfalls im week11b.pdf) auf die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
\theta_{\text{call}} &= -S_t \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} N'(d_+) - rKe^{-r(T-t)} N(d_-) \\
&\overset{r=0}{=} -S_t \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} N'(d_+) \\
\theta_{\text{put}} &= -S_t \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} N'(-d_+) + rKe^{-r(T-t)} N(-d_-) \\
&\overset{r=0}{=} -S_t \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} N'(-d_+) \\
&\overset{N'(-x)=N'(x)}{=} -S_t \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} N'(+d_+) = \theta_{\text{call}} =: \theta
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{\text{call}} &= \frac{N'(d_+)}{\sigma\sqrt{T-t}\, S_t} \\
\gamma_{\text{put}} &= \gamma_{\text{call}} =: \gamma
\end{aligned} \tag{19}$$

Also bekommen wir

$$\begin{aligned}
\theta + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \gamma &= -S \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} N'(d_+) + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{N'(d_+)}{\sigma\sqrt{T-t}\, S} \\
&= -S \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} N'(d_+) + \frac{\sigma}{2} S \frac{N'(d_+)}{\sqrt{T-t}} = 0
\end{aligned}$$

Damit ist die Black-Scholes PDE (17) erfüllt.

Beispiel 2: Wir betrachten die pfadunabhängige Option mit Payoff

$$H(S_T) := \frac{S_0}{S_T} \tag{20}$$

Das Underlying S_t habe Black-Scholes Preisdynamik mit Volatilität σ und Drift μ. Die Zinsen seien $r \neq 0$.

a) Berechnen Sie den Zeit-t Preis $V(S_t, t)$ der Option (20).

b) Wenn man alles richtig gemacht hat, bekommt man das Ergebnis

$$V(S_t, t) \;=\; \tfrac{S_0}{S_t}\, e^{(\sigma^2 - 2r)(T-t)} \tag{21}$$

Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass der Preis (21) die Black-Scholes PDE mit Zinsen r erfüllt.

Lösung a) Der Preis zur Zeit $t \in [0, T]$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
V_t &= e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} H\big(S_t\, e^{\sigma\sqrt{T-t}\,x + (r-\sigma^2/2)(T-t)}\big)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} \frac{S_0}{S_t\, e^{\sigma\sqrt{T-t}\,x + (r-\sigma^2/2)(T-t)}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= e^{-r(T-t)} \tfrac{S_0}{S_t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sigma\sqrt{T-t}\,x - (r-\sigma^2/2)(T-t)}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= e^{-r(T-t)} \tfrac{S_0}{S_t} e^{-(r-\sigma^2/2)(T-t)} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sigma\sqrt{T-t}\,x}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= e^{-2r(T-t)} \tfrac{S_0}{S_t} e^{\sigma^2/2(T-t)} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sigma\sqrt{T-t}\,x}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, e^{-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\; e^{\frac{\sigma^2(T-t)}{2}} \\
&= e^{(-2r+\sigma^2)(T-t)} \tfrac{S_0}{S_t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma\sqrt{T-t})^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= e^{(-2r+\sigma^2)(T-t)}\; \tfrac{S_0}{S_t} \;\times 1 \\
&= \tfrac{S_0}{S_t}\, e^{(\sigma^2-2r)(T-t)}\;.
\end{aligned}$$

b) Im Falle von Zinsen $r \neq 0$ lautet die Black-Scholes PDE

$$\frac{\partial V}{\partial t} \;+\; \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \;+\; rS\frac{\partial V}{\partial S} \;-\; rV \;=\; 0 \tag{22}$$

mit der Final-Condition

$$V(S, t = T) \;=\; H(S)\;.$$

Die Preis-Funktion aus Teil (a) lautet (mit $S_t \to S$ und S_0 als eine Konstante)

$$V(S, t) \;=\; \frac{S_0}{S}\, e^{(\sigma^2-2r)(T-t)} \tag{23}$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial S} &= -\frac{S_0}{S^2}\, e^{(\sigma^2-2r)(T-t)} &= -\frac{1}{S}\, V \\
\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= +2\,\frac{S_0}{S^3}\, e^{(\sigma^2-2r)(T-t)} &= +\frac{2}{S^2}\, V
\end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -(\sigma^2-2r)\,\frac{S_0}{S}\, e^{(\sigma^2-2r)(T-t)} = (2r-\sigma^2)\, V$$

Wir setzen diese Ableitungen in die Black-Scholes PDE (22) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV \\
&\quad = (2r-\sigma^2)\, V + \frac{\sigma^2}{2} S^2\, \frac{2}{S^2}\, V - rS\, \frac{1}{S}\, V - rV \\
&\quad = 2rV - \sigma^2 V + \sigma^2 V - 2rV = 0
\end{aligned}$$

also ist die Black-Scholes PDE erfüllt. Und die Final-Condition

$$V(S, t=T) = \frac{S_0}{S}\, e^{(\sigma^2-2r)(T-T)} = \frac{S_0}{S} = H(S)$$

ist offensichtlich auch erfüllt.