

9. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

1. Aufgabe: In der Vorlesung haben wir die Formel

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N f\left(\frac{2k-N}{\sqrt{N}}\right) \times \frac{1}{2^N} \binom{N}{k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad (1)$$

benutzt und im Skript wird sie mit Hilfe der Fourier-Transformation bewiesen. In dieser Aufgabe geben wir einen alternativen Beweis (oder eher Plausibilisierung, da wir keine rigorosen Fehlerschranken angeben) mit Hilfe der Stirlingschen Formel. Diese lautet: Für grosse N gilt:

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N \quad (2)$$

oder genauer $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{\sqrt{2\pi N}} \left(\frac{e}{N}\right)^N = 1$. Zum Beweis von (1) setzen wir

$$x := \frac{2k-N}{\sqrt{N}} = x_{N,k} \in [-\sqrt{N}, +\sqrt{N}] \quad (3)$$

Wir halten dieses $x \in \mathbb{R}$ fest und lassen N nach unendlich gehen (o.B.d.A. $N > x^2$), dann geht offensichtlich auch

$$k = \frac{N + \sqrt{N}x}{2} \quad (4)$$

nach unendlich. Zeigen Sie jetzt:

a) Es ist

$$N - k = \frac{N - \sqrt{N}x}{2} \quad (5)$$

und für grosse N gilt:

$$\frac{1}{2^N} \binom{N}{k} \approx \frac{1}{2^N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{N}{k(N-k)}} \frac{N^N}{k^k (N-k)^{N-k}} \quad (6)$$

Benutzen Sie dazu die Stirlingsche Formel (2).

b) Es ist

$$\frac{N}{k} = \frac{2}{1 + \frac{x}{\sqrt{N}}}, \quad \frac{N}{N-k} = \frac{2}{1 - \frac{x}{\sqrt{N}}} \quad (7)$$

c) Weiterhin gilt

$$\frac{1}{2^N} \frac{N^N}{k^k (N-k)^{N-k}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{N}\right)^{N/2}} \times \frac{\left(1 - \frac{x}{\sqrt{N}}\right)^{\frac{\sqrt{N}x}{2}}}{\left(1 + \frac{x}{\sqrt{N}}\right)^{\frac{\sqrt{N}x}{2}}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (8)$$

d) Es ist

$$\Delta x := x_{N,k} - x_{N,k-1} = \frac{2}{\sqrt{N}} \quad (9)$$

und

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{N}{k(N-k)}}}{\Delta x} = 1, \quad (10)$$

für grosse N gilt also

$$\sqrt{\frac{N}{k(N-k)}} \approx \Delta x. \quad (11)$$

Mit (6,8) und (11) haben wir dann also:

$$\frac{1}{2^N} \binom{N}{k} \approx e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi}} \quad (12)$$

wobei $x = x_{N,k}$ durch die Formel (3) gegeben ist und das Δx durch die Formel (9).

2.Aufgabe: Wir beweisen (oder wieder eher plausibilisieren) jetzt noch die Stirlingsche Formel (2). Gehen Sie dazu folgendermassen vor:

a) Beweisen Sie durch Induktion und partieller Integration:

$$N! = \int_0^\infty x^N e^{-x} dx \quad (13)$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Substitution $x = y + N$ und Formel (13):

$$N! = \left(\frac{N}{e}\right)^N \int_{-N}^\infty e^{N \log[1 + \frac{y}{N}] - y} dy \quad (14)$$

c) Benutzen Sie dann die Taylor-Entwicklung $\log(1+h) \approx h - \frac{h^2}{2}$, um auf

$$N! \approx \left(\frac{N}{e}\right)^N \int_{-N}^\infty e^{-\frac{y^2}{2N}} dy \quad (15)$$

zu kommen.

d) Substituieren Sie schliesslich $y/\sqrt{N} = z$ in Formel (15) und folgern Sie

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N \quad (16)$$

für grosse N .