7. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

1.Aufgabe: Führen Sie die folgenden Berechnungen durch:

a) Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, $dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$ sei das Wiener-Maß und $\alpha \geq 0$ sei ein reeller Parameter. Beweisen Sie die folgende Formel für ein festes $t \in (0,T]$:

$$\begin{aligned}\mathsf{Prob}\big[\,|x_t| \;\geq\; \alpha\sqrt{t}\,\big] \;&=\; \int \chi\big(\,|x_t| \;\geq\; \alpha\sqrt{t}\,\big)\, dW(\{x_s\}_{0<s\leq T}) \\ &=\; 2\,N(-\alpha) \qquad \text{(unabhängig von t)}\end{aligned}$$

Dabei ist

$$N(x) \;=\; \textstyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$$

und χ bezeichne die Indikator-Funktion mit $\chi(A) = 1$ falls die Aussage A wahr ist und $\chi(A) = 0$ falls A falsch ist. Benutzen Sie dazu das Theorem 4.1.

b) Plausibilisieren Sie das Resultat aus Teil (a) für $\alpha = 2$ durch eine geeignete Simulation in Excel/VBA. Wie gross ist der numerische Wert von $2 \times N(-2)$?

Bemerkung: Nach Aufgabe 1b vom letzten Übungsblatt ist $\sqrt{t}$ gerade die Standardabweichung $\sqrt{\mathsf{V}[\,x_t\,]}$ einer Brownschen Bewegung zur Zeit t und der Erwartungswert war $\mathsf{E}[x_t] = 0$. Wir berechnen hier also die W'keit, dass die Brownsche Bewegung um mindestens α Standardabweichungen von ihrem Erwartungswert abweichen tut.

2.Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$ sei das Wiener-Maß. Beweisen Sie: Für $t > s$ gilt:

a) $\mathsf{E}[\,x_t - x_s\,] \;=\; 0\,.$

b) $\mathsf{V}[\,x_t - x_s\,] \;=\; t - s\,.$

c) $\mathsf{Cov}[\,x_s\,,\,x_t\,] \;=\; \min\{\,s\,,\,t\,\} \;=\; s\,.$

Verwenden Sie dazu das Theorem 4.1 aus der Vorlesung mit $m = 2$.