Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2021/22

# 5. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

**1.Aufgabe:** **Gauss'sche Integrale:** Die folgenden Formeln werden wir sehr häufig im weiteren Verlauf der Vorlesung benutzen. Beweisen Sie sie:

**a)**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \;=\; \sqrt{2\pi}\;.$$

Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \;=\; \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\,\right\}^{1/2}$ und Polarkoordinaten.

**b)**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \;=\; 1\;.$$

Dabei heisst der Integrand

$$p(x;\mu,\sigma) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

die Dichte der Gauss'schen Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu$ und Standardabweichung $\sigma$.

**c)**

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; 1\;.$$

Hinweis: $x^2\, e^{-\frac{x^2}{2}} = x \times x\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ und partielle Integration.

**d)**

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3\, e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; 0\;.$$

**e)**

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4\, e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; 3\;.$$

**f)**

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \, e^{-\frac{x^2}{2}} \, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad = \quad \begin{cases} (n-1)!! & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

mit

$$(n-1)!! \quad := \quad (n-1)(n-3)(n-5)\cdots 3 \cdot 1 \; .$$

**g)**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} \, e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} \, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad = \quad \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}} \, e^{\frac{1}{\alpha} \frac{\lambda^2}{2}} \; , \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0 \; .$$

Hinweis: quadratische Ergänzung.

**2.Aufgabe:** Beweisen Sie das Lemma 4.1 aus der Vorlesung, das war die folgende Aussage: Es sei

$$p_t(x,y) \quad := \quad \tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \, e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$$

Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} p_s(x,y) \, p_t(y,z) \, dy \quad = \quad p_{s+t}(x,z) \quad .$$