

#### 4. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

**1. Aufgabe:** Wir betrachten ein  $N$ -Perioden Binomialmodell mit Preisprozess ( $k = 1, \dots, N$ )

$$S_k = S_{k-1} \times \begin{cases} (1+q) & \text{mit W'keit } p_{\text{up}} = 1/2 \\ (1-q) & \text{mit W'keit } p_{\text{down}} = 1/2 \end{cases}$$

mit  $q \in (0, 1)$  (etwa  $N = 250$  und  $q = 1\%$ ) und  $S_0 = 100$ . Berechnen Sie die folgenden Erwartungswerte:

- a)  $E[S_N]$
- b)  $E[S_N | \{S_j\}_{j=0}^k]$
- c)  $E[\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N S_m]$
- d)  $E[\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N S_m | \{S_j\}_{j=0}^k]$
- e)  $E[\frac{S_0}{S_N}]$
- f)  $E[\frac{S_0}{S_N} | \{S_j\}_{j=0}^k]$

*Bemerkung:* Die eigentliche Rechnung ist nicht so schwierig, die Übung besteht mehr darin, sich zu überlegen, ob das Ergebnis eine reine Zahl ist oder ob und welche Buchstaben dann noch im Ergebnis auftauchen.

**2. Aufgabe:** Wir betrachten ein  $N$ -Perioden Binomialmodell mit Preisprozess ( $k = 1, 2, \dots, N$ )

$$S_k = S_{k-1} \times \begin{cases} (1+q) & \text{mit W'keit } p_{\text{up}} = p \\ (1 + \text{ret}_{\text{down}}) & \text{mit W'keit } p_{\text{down}} = 1 - p \end{cases}$$

mit einer up-Wahrscheinlichkeit  $p \in (0, 1)$ . Das  $p$  sei gegeben und das  $q$ , das wäre also der up-Return, sei ebenfalls gegeben. Für welche Werte des down-returns  $\text{ret}_{\text{down}}$  ist der Preisprozess  $\{S_k\}_{k=0}^N$  ein Martingal? Das heisst, es soll gelten

$$E[S_k | \{S_j\}_{j=0}^{k-1}] \stackrel{!}{=} S_{k-1}$$

Wie gross ist dieser Wert etwa für  $p = 1/4$ ,  $p = 1/2$  und  $p = 3/4$ ? ( $\text{ret}_{\text{down}}$  hängt dann nur noch von  $q$  ab)