

## 12. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

**1. Aufgabe:** Es sei  $\{S_t\}_{t \geq 0}$  gegeben durch das Black-Scholes Modell

$$dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dx_t$$

mit  $x_t$  eine Brownsche Bewegung und wir definieren

$$\tilde{S}_t := 1/S_t$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Ito-Formel, dass  $\tilde{S}_t$  ebenfalls wieder eine geometrische Brownsche Bewegung ist, d.h.  $\tilde{S}_t$  erfüllt die Gleichung

$$d\tilde{S}_t/\tilde{S}_t = a dt + b dx_t \tag{1}$$

mit geeigneten Konstanten  $a$  und  $b$ . Bestimmen Sie diese Konstanten  $a$  und  $b$  als Funktion von  $\mu$  und  $\sigma$ .

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Gleichung (1) und die Konstanten  $a$  und  $b$  herzuleiten.

- a) Zeigen Sie die Gleichung (1), indem Sie das Theorem 8.2 aus dem `week13a.pdf` benutzen. Was ist ihr  $F$  in diesem Fall?
- b) Zeigen Sie die Gleichung (1), indem Sie das Theorem 8.4 aus dem `week13a.pdf` benutzen, mit  $X_t = S_t$ . Was ist ihr  $F$  in diesem Fall?

**2. Aufgabe:** Es sei  $x_t$  eine Brownsche Bewegung. Beweisen Sie folgende Identitäten mit Hilfe der Ito-Formel:

a)  $\int_0^t x_s dx_s = \frac{x_t^2 - t}{2}$

b)  $\int_0^t x_s^2 dx_s = \frac{x_t^3}{3} - \int_0^t x_s ds$

c)  $\int_0^t s dx_s = t x_t - \int_0^t x_s ds$