Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2021/22

Probe-Klausur zur Vorlesung
Finanzmathematik I

(die tatsächliche Klausur wird etwas kürzer)

1.Aufgabe (10 Punkte): Eine Aktie habe einen Preis von $S_0 = 100$. Wir betrachten einen Zeithorizont von 1 Monat und nehmen an, dass diese Aktie entweder nur nach 120 steigen kann oder auf 80 fallen kann. Wir betrachten eine Standard-Verkaufs-Option mit Fälligkeit $T = 1$ Monat und Ausübungspreis $K = 90$. Die Auszahlungsfunktion ist also gegeben durch

$$H(S_T) \;=\; \max\{\, 90 - S_T \,,\, 0 \,\}$$

Dabei ist $S_T \in \{80, 120\}$ der Preis der Aktie in einem Monat.

a) Berechnen Sie den Preis dieser Option.

b) Was muss die Verkäuferin dieser Option tun, damit, egal ob die Aktie steigt oder fällt, sie in jedem Fall in der Lage ist, der Auszahlungsverpflichtung der Option nachzukommen, ohne dabei Verlust zu machen?

Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem von 2 Gleichungen mit 2 Variablen auf und lösen Sie dann dieses Gleichungssystem. Die Zinsen seien $r = 0$.

2.Aufgabe (10 Punkte): Ein Investor verfolgt folgende Handelsstrategie: Ist S_k der Schlusskurs einer Aktie am Tag k, so hält er $S_k - S_0$ Aktien am Ende von Tag k. Am Ende von Tag 0 hält er 0 Aktien. Folgender Preis-Pfad $\{S_0, S_1, ..., S_7\}$ habe sich realisiert:

$$\{100, 102, 100, 97, 99, 98, 95, 97\}$$

Die Position wurde am Ende von Tag 7 zum Schlusskurs von 97 geschlossen. Welchen Betrag hat diese Strategie generiert? Die Zinsen seien $r = 0$.

3.Aufgabe (15 Punkte): Gegeben sei ein 3-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess

$$S_k \;=\; S_{k-1} \times \begin{cases} (1+20\%) & \text{mit W'keit } \; 40\% \\ (1-20\%) & \text{mit W'keit } \; 60\% \end{cases}$$

mit $k = 1, 2, 3$ und $S_0 = 100$. Die Zinsen seien null, $r = 0$.

a) Berechnen Sie sämtliche möglichen Aktienpreise in diesem Model und skizzieren Sie den Binomialbaum dazu, an dessen Knotenpunkten Sie die Aktienpreise eintragen.

b) Betrachten Sie folgende Option H mit Auszahlung ($|\cdot|$ sind Betrags-Striche)

$$H(S_3) \;:=\; \big|\, S_3 - S_0 \,\big| \tag{1}$$

Berechnen Sie den Preis dieser Option zur Zeit $k = 0$.

c) Berechnen Sie die Absicherungsstrategie für die Option (1). D.h., berechnen Sie sämtliche δ's. (Sie können die delta's als Bruchzahlen angeben, etwa $\delta = -\frac{23,2}{38,4}$, oder mit dem Taschenrechner zu $\delta = -0,6042$ umschreiben.)

d) Überprüfen Sie die Absicherungsstrategie aus (c) für die Preis-Pfade $\mathrm{pfad}_1 := \{\mathrm{up}, \mathrm{down}, \mathrm{up}\}$ und $\mathrm{pfad}_2 := \{\mathrm{down}, \mathrm{down}, \mathrm{down}\}$.

4.Aufgabe (15 Punkte): Die Preisdynamik eines Basiswertes S_t sei gegeben durch das Black-Scholes Modell

$$dS_t/S_t \;=\; \mu\, dt + \sigma\, dx_t$$

mit Drift $\mu = 5\%$ und Volatilität $\sigma = 30\%$. Die Zinsen seien gegeben durch $r = 3\%$ und der aktuelle, Zeit $t = 0$, Preis des Basiswertes sei $S_0 = 50$.

a) Berechnen Sie den $t = 0$ Preis V_0 der Standard-Verkaufs-Option

$$H_{\mathrm{put}}(S_T) \;=\; \max\{\, 40 - S_T \,,\, 0 \,\}$$

mit Laufzeit $T = 2$ Jahre.

b) Berechnen Sie den $t = 0$ Preis der 'at the money performance type' Call-Option mit Fälligkeitsdatum $T = 4$ Jahre und payoff

$$H_{\mathrm{call,perf}}(S_T) \;=\; \max\{\, S_T/S_0 - 1 \,,\, 0 \,\}$$

Verwenden Sie dazu die Black-Scholes Formeln aus der Vorlesung und drücken Sie den payoff in geeigneter Weise durch eine Standard-Call-Option aus.

5.Aufgabe (10 Punkte): Gegeben sei eine Option mit Laufzeit $T > 0$ und Auszahlung

$$H(S_T) \;:=\; \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^2$$

Die Preisdynamik von $\{S_t\}_{t\geq 0}$ sei gegeben durch das Black-Scholes Modell

$$dS_t/S_t \;=\; \mu\, dt + \sigma\, dx_t$$

Die Zinsen seien positiv, $r > 0$.

a) Berechnen Sie den Preis V_0 für diese Option zur Zeit $t = 0$.

b) Der Preis dieser Option zur Zeit t, $V(S_t, t)$, berechnet sich zu

$$V(S_t, t) \;=\; \left(\tfrac{S_t}{S_0}\right)^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $V(S, t)$ die Black-Scholes PDE erfüllt.

c) Berechnen Sie die replizierende Strategie für diese Option, d.h., berechnen Sie das $\delta = \delta(S_t, t)$ für diese Option für $0 \leq t < T$.

6.Aufgabe (10 Punkte): Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, $dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$ sei das Wiener-Maß und der Erwartungswert bezüglich W sei gegeben durch $\mathsf{E}[f] = \int f(\{x_t\})\, dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$. Berechnen Sie folgende Erwartungswerte:

a) $\mathsf{E}[\, e^{-\lambda\, x_t}\,]$

b) $\mathsf{E}[\, e^{-\lambda\, x_t^2}\,]$

Dabei sei $\lambda > 0$ ein positiver reeller Parameter.

7.Aufgabe (10 Punkte): Es sei $\{S_t\}_{t\geq 0}$ gegeben durch das Black-Scholes Modell

$$dS_t/S_t \;=\; \mu\, dt + \sigma\, dx_t$$

mit x_t eine Brownsche Bewegung und wir definieren

$$\tilde{S}_t \;:=\; 1/S_t$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Ito-Formel, dass $\tilde{S}_t$ ebenfalls wieder eine geometrische Brownsche Bewegung ist, d.h. $\tilde{S}_t$ erfüllt die Gleichung

$$d\tilde{S}_t/\tilde{S}_t \;=\; a\, dt + b\, dx_t$$

mit geeigneten Konstanten a und b. Bestimmen Sie diese Konstanten a und b als Funktion von μ und σ.