Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

Finanzmathematik I
WS 2021/22

Lösungen Blatt 12
Finanzmathematik I

Aufgabe 1: Es sei $\{S_t\}_{t\geq 0}$ gegeben durch das Black-Scholes Modell

$$dS_t/S_t \;=\; \mu\,dt \;+\; \sigma\,dx_t$$

mit x_t eine Brownsche Bewegung und wir definieren

$$\tilde{S}_t \;:=\; 1/S_t$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Ito-Formel, dass $\tilde{S}_t$ ebenfalls wieder eine geometrische Brownsche Bewegung ist, d.h. $\tilde{S}_t$ erfüllt die Gleichung

$$d\tilde{S}_t/\tilde{S}_t \;=\; a\,dt \;+\; b\,dx_t \tag{1}$$

mit geeigneten Konstanten a und b. Bestimmen Sie diese Konstanten a und b als Funktion von μ und σ.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Gleichung (1) und die Konstanten a und b herzuleiten.

a) Zeigen Sie die Gleichung (1), indem Sie das Theorem 8.2 aus dem `week13a.pdf` benutzen. Was ist ihr F in diesem Fall?

b) Zeigen Sie die Gleichung (1), indem Sie das Theorem 8.4 aus dem `week13a.pdf` benutzen, mit $X_t = S_t$. Was ist ihr F in diesem Fall?

Lösung: a) Die Lösung der SDE

$$dS_t/S_t \;=\; \mu\,dt + \sigma\,dx_t$$

ist gegeben durch

$$S_t \;=\; S_0\, e^{\sigma x_t + (\mu - \sigma^2/2)t}$$

Also haben wir

$$\tilde{S}_t \;=\; \tfrac{1}{S_t} \;=\; \tfrac{1}{S_0}\, e^{-\sigma x_t - (\mu-\sigma^2/2)t} \;=\; F(x_t, t)$$

mit der Funktion

$$F(x,t) \;:=\; \tfrac{1}{S_0}\, e^{-\sigma x - (\mu-\sigma^2/2)t}$$

Wir bekommen die folgenden Ableitungen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= -\sigma\, F \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \sigma^2\, F \\
\frac{\partial F}{\partial t} &= -\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) F
\end{aligned}
$$

Jetzt wenden wir die Ito-Formel aus dem Theorem 8.2 an,

$$
\begin{aligned}
dF &= \frac{\partial F}{\partial x}\, dx_t \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,(dx_t)^2 \;+\; \frac{\partial F}{\partial t}\, dt \\
&= \frac{\partial F}{\partial x}\, dx_t \;+\; \left\{ \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \;+\; \frac{\partial F}{\partial t} \right\} dt \\
&= -\sigma\, F\, dx_t \;+\; \left\{ \frac{1}{2}\,\sigma^2\, F \;-\; \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) F \right\} dt
\end{aligned}
$$

Oder jetzt wieder mit $F = \tilde{S}$,

$$
\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = -\,\sigma\, dx_t \;+\; (\sigma^2 - \mu)\, dt
$$

Also,

$$
\begin{aligned}
a &= \sigma^2 - \mu \\
b &= -\,\sigma
\end{aligned}
$$

b) Wir schreiben

$$
\tilde{S}_t = \frac{1}{S_t} = F(S_t)
$$

mit

$$
F(X_t) := \frac{1}{X_t}
$$

und

$$
X_t := S_t
$$

Das F hängt nicht explizit von der Zeit t ab, also wir brauen kein zweites t-Argument, oder in terms of Theorem 8.4 ist

$$
\frac{\partial F}{\partial t} = 0
$$

Wir bekommen also

$$
\begin{aligned}
dF &= \frac{\partial F}{\partial x}\, dX_t \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,(dX_t)^2 \;+\; \frac{\partial F}{\partial t}\, dt \\
&= \frac{\partial F}{\partial x}\, dX_t \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,(dX_t)^2
\end{aligned}
$$

mit $F(x) = 1/x$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= -\,\frac{1}{x^2} \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= +\,\frac{2}{x^3}
\end{aligned}
$$

und

$$\begin{aligned} dX_t &= dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dx_t) \\ (dX_t)^2 &= (dS_t)^2 = S_t^2(\mu\, dt + \sigma\, dx_t)^2 = S_t^2\sigma^2\, dt \end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t = dF &= \tfrac{\partial F}{\partial x}\, dX_t + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,(dX_t)^2 \\ &= -\tfrac{1}{S_t^2}\, S_t(\mu\, dt + \sigma\, dx_t) + \tfrac{1}{2}\tfrac{2}{S_t^3}\, S_t^2\sigma^2\, dt \\ &= -\tfrac{1}{S_t}\,(\mu\, dt + \sigma\, dx_t) + \tfrac{1}{S_t}\,\sigma^2\, dt \\ &= \tilde{S}_t\left\{ (\sigma^2 - \mu)\, dt - \sigma\, dx_t \right\} \end{aligned}$$

und damit

$$d\tilde{S}_t/\tilde{S}_t = a\, dt + b\, dx_t$$

mit

$$\begin{aligned} a &= \sigma^2 - \mu \\ b &= -\sigma \;. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Es sei x_t eine Brownsche Bewegung. Beweisen Sie folgende Identitäten mit Hilfe der Ito-Formel:

a) $\int_0^t x_s\, dx_s = \frac{x_t^2 - t}{2}$

b) $\int_0^t x_s^2\, dx_s = \frac{x_t^3}{3} - \int_0^t x_s\, ds$

c) $\int_0^t s\, dx_s = t\, x_t - \int_0^t x_s\, ds$

Lösung: Wir benutzen die Ito-Formel aus Theorem 8.2:

$$f(x_T, T) - f(x_0, 0) = \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(x_t, t)\, dx_t + \int_0^T \left\{ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right\}(x_t, t)\, dt$$

oder, mit $x_0 = 0$,

$$\int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(x_t, t)\, dx_t = f(x_T, T) - f(0, 0) - \int_0^T \left\{ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right\}(x_t, t)\, dt \qquad (2)$$

a) We put $f(x,t) = \frac{x^2}{2}$. Then equation (2) becomes

$$\begin{aligned}
\int_0^T x_t \, dx_t &= \frac{x_T^2}{2} - 0 - \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \times 1 + 0 \right\} dt \\
&= \frac{x_T^2}{2} - \frac{T}{2} \, .
\end{aligned}$$

b) We put $f(x,t) = \frac{x^3}{3}$. Then equation (2) becomes

$$\begin{aligned}
\int_0^T x_t^2 \, dx_t &= \frac{x_T^3}{3} - 0 - \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \times 2x_t + 0 \right\} dt \\
&= \frac{x_T^3}{3} - \int_0^T x_t \, dt \, .
\end{aligned}$$

c) We put $f(x,t) = t\,x$. Then equation (2) becomes

$$\begin{aligned}
\int_0^T t \, dx_t &= T\,x_T - 0 - \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \times 0 + x_t \right\} dt \\
&= T\,x_T - \int_0^T x_t \, dt \, .
\end{aligned}$$