

Lösungen zum 1. Übungsblatt Finanzmathematik I

Aufgabe 1) Wir haben ein Startgeld V_0 . Zum Zeitpunkt $t = 0$ kaufen wir δ Stücke vom Underlying, dafür müssen wir (die Bank) δS_0 bezahlen. Das Bank-Portfolio zum Zeitpunkt $t = 0$ sieht also so aus:

$$V_0 = \underbrace{V_0 - \delta S_0}_{\text{cash}} + \underbrace{\delta S_0}_{\text{Aktie}}$$

Die Zeit vergeht von $t = 0$ nach $t = T$. Die Cash-Position bleibt gleich (wir nehmen an, dass die Zinsen 0 sind, $r = 0$). Die Aktien-Position verändert ihren Wert von δS_0 zu δS_T mit $S_T \in \{\text{ret}_{\text{up}}, \text{ret}_{\text{down}}\}$. Also, der Wert des Bank-Portfolios zur Zeit $t = T$ beträgt

$$V_T = \underbrace{V_0 - \delta S_0}_{\text{cash}} + \underbrace{\delta S_T}_{\text{Aktie}} \stackrel{!}{=} H(S_T)$$

Dabei ist $H(S_T) \in \{H_{\text{up}}, H_{\text{down}}\}$ die Optionsauszahlung. Also erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} V_0 - \delta S_0 + \delta S_{\text{up}} &= H_{\text{up}} \\ V_0 - \delta S_0 + \delta S_{\text{down}} &= H_{\text{down}} \end{aligned}$$

Wenn wir die zweite von der ersten Gleichung abziehen, bekommen wir

$$\delta(S_{\text{up}} - S_{\text{down}}) = H_{\text{up}} - H_{\text{down}}$$

oder

$$\delta = \frac{H_{\text{up}} - H_{\text{down}}}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}}$$

Das können wir etwa in die erste Gleichung einsetzen und bekommen

$$\begin{aligned} V_0 &= H_{\text{up}} - \delta(S_{\text{up}} - S_0) \\ &= H_{\text{up}} - \frac{H_{\text{up}} - H_{\text{down}}}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}}(S_{\text{up}} - S_0) \\ &= H_{\text{up}} \frac{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} - H_{\text{up}} \frac{S_{\text{up}} - S_0}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} + H_{\text{down}} \frac{S_{\text{up}} - S_0}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} \\ &= H_{\text{up}} \frac{S_0 - S_{\text{down}}}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} + H_{\text{down}} \frac{S_{\text{up}} - S_0}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} \\ &= H_{\text{up}} w_{\text{up}} + H_{\text{down}} w_{\text{down}} \end{aligned}$$

mit den Gewichten

$$w_{\text{up}} = \frac{S_0 - S_{\text{down}}}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}},$$
$$w_{\text{down}} = \frac{S_{\text{up}} - S_0}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}}.$$

Aufgabe 2) siehe Excelsheet