

8. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamik der Teilchen und Felder

1. Aufgabe: Simulieren Sie die Bahnkurven (x_t, p_t) für einen eindimensionalen anharmonischen Oszillator mit Hamilton-Funktion

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{\lambda}{\alpha} |x|^\alpha$$

indem Sie die diskretisierten Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}x_{t+dt} &= x_t + p_t dt \\ p_{t+dt} &= p_t - \lambda \operatorname{sign}(x_t) |x_t|^{\alpha-1} dt\end{aligned}$$

mit einer geeigneten Software Ihrer Wahl numerisch iterieren. Betrachten Sie die Anfangsbedingungen $(x_{t=0}, p_{t=0}) = (x_0, 0)$ mit $x_0 \in \{0.5, 1, 2\}$ und wählen Sie $\lambda = 1$ und $\alpha \in \{1, 2, 4\}$, Sie sollten dann also in der Lage sein, die Bilder aus dem `week8.pdf` zu reproduzieren.

2. Aufgabe: Lesen Sie sich noch einmal das Theorem 3.1.4 aus der Vorlesung durch, aus dem `week8.pdf`. Beweisen Sie dann die Aussagen in Teil (c) und (d) des Theorems, indem Sie die Aussagen aus Teil (a) und (b) verwenden.

3. Aufgabe: Es sei $H = H(x, p)$ eine beliebige Hamilton-Funktion mit $(x, p) \in \mathbb{R}^2$ und die Bahnkurven (x_t, p_t) seien eine Lösung der Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Wir machen die Transformation $(x, p) \rightarrow (\varepsilon, \varphi)$ mit

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{2\varepsilon} \cos \varphi \\ p &= \sqrt{2\varepsilon} \sin \varphi\end{aligned}$$

oder in komplexer Schreibweise¹

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (x + ip) = \sqrt{\varepsilon} e^{i\varphi}$$

und definieren die transformierte Hamilton-Funktion

$$\tilde{H}(\varepsilon, \varphi) := H(\sqrt{2\varepsilon} \cos \varphi, \sqrt{2\varepsilon} \sin \varphi)$$

Zeigen Sie: Die transformierten Bahnkurven $(\varepsilon_t, \varphi_t)$ erfüllen die Gleichungen

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varphi}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varepsilon}.$$

Das heisst, die Struktur der Hamiltonschen Gleichungen hat sich unter dieser Transformation nicht geändert. Jede Transformation, die die Hamiltonschen Gleichungen invariant lässt, wird auch als kanonische Transformation bezeichnet.

¹so sieht man das gelegentlich in einem quantenmechanischen Kontext