Hochschule RheinMain WS 2021/22
Prof. Dr. D. Lehmann

7. Übungsblatt zur Vorlesung
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Wir betrachten die kräftefreie Bewegung eines Teilchens im $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten,

$$\vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; r\begin{pmatrix} \cos\varphi\,\sin\theta \\ \sin\varphi\,\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

mit $r \in [0,+\infty)$, $\varphi \in [0,2\pi)$ und $\theta \in [0,\pi]$. In der Vorlesung haben wir in dem `week3.pdf` in Gleichung (9) den folgenden Ausdruck für die Lagrange-Funktion $L = T - V = T - 0 = T$ hergeleitet:

$$L \;=\; \tfrac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^{\,2} \;=\; \tfrac{m}{2}\Big\{\,\dot r^2 \,+\, r^2\dot\varphi^2\sin^2\theta \,+\, r^2\dot\theta^2\,\Big\} \tag{1}$$

Wir wählen also

$$(q,\dot q) \;=\; (r,\varphi,\theta,\dot r,\dot\varphi,\dot\theta) \tag{2}$$

als die verallgemeinerten Koordinaten.

a) Berechnen Sie die verallgemeinerten Impulse $(p_r, p_\varphi, p_\theta)$.

b) Berechnen Sie die Hamilton-Funktion $H = H(r,\varphi,\theta,p_r,p_\varphi,p_\theta)$.

c) Stellen Sie die Hamiltonschen Gleichungen auf.

d) Zeigen Sie, dass die Hamiltonschen Gleichungen aus Teil (c) äquivalent sind zum System (11) aus dem `week3.pdf`, das waren die Gleichungen

$$\begin{aligned} \ddot r \,-\, r\dot\varphi^2\sin^2\theta \,-\, r\dot\theta^2 \;&=\; 0 \\ \tfrac{d}{dt}\big\{\,r^2\dot\varphi\sin^2\theta\,\big\} \;&=\; 0 \\ \tfrac{d}{dt}\big\{\,r^2\dot\theta\,\big\} \,-\, r^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta \;&=\; 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

2.Aufgabe: Beweisen Sie das Theorem 3.1.3 aus der Vorlesung, aus dem `week7.pdf`, das war die folgende Aussage: Es sei $L = T - V$ die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems und die kinetische Energie T und die potentielle Energie V seien von der Form[1]

$$T \;=\; T(q,\dot q) \;=\; \sum_{j,k=1}^{f} \dot q_j \dot q_k\, t_{jk}(q) \tag{4}$$

mit $t_{jk}(q) = t_{kj}(q)$ und die potentielle Energie hänge nur von den q's ab, aber nicht von den $\dot q$. Also

$$V \;=\; V(q) \;=\; V(q_1,\cdots,q_f) \tag{5}$$

Dann gilt: Die Hamilton-Funktion H ist gegeben durch die Gesamtenergie, es ist

$$H \;=\; T + V\,. \tag{6}$$

[1] auf diese Form waren wir in dem `week4.pdf` in Gleichung (20) gekommen