Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2021/22

**6. Übungsblatt zur Vorlesung
Dynamik der Teilchen und Felder**

1.Aufgabe: Eine Perle der Masse m bewege sich unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F} = (0, -mg)$ reibungsfrei auf einem Draht in der (x, z)-Ebene. Der Draht werde durch eine Funktion $z = f(x)$ beschrieben und verbinde die Punkte $P_1 = (0, h)$ und $P_2 = (\ell, 0)$. Wir haben also ein Problem mit einem Freiheitsgrad und wir wählen x als die verallgemeinerte Koordinate.

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L = L(x, \dot{x})$ an.

b) Zeigen Sie, dass sich die Bewegungsgleichung[1] auf die folgende Form bringen lässt:

$$\left\{1 + f'(x)^2\right\}\ddot{x} \; + \; f'(x)f''(x)\,\dot{x}^2 \; + \; g\,f'(x) \;\; = \;\; 0\,. \tag{1}$$

c) Nach dem Theorem 2.5.2 aus der Vorlesung ist die Funktion

$$H(x, \dot{x}) \;\; := \;\; \tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\,\dot{x} \; - \; L(x, \dot{x}) \tag{2}$$

eine Konstante der Bewegung, es gilt $\frac{d}{dt}H(x_t, \dot{x}_t) \; = \; 0$. Zeigen Sie: Für alle Zeiten $t \geq 0$ gilt

$$H(x_t, \dot{x}_t) \;\; = \;\; \tfrac{m}{2}\left\{1 + f'(x_t)^2\right\}\dot{x}_t^2 \; + \; mgf(x_t) \;\; = \;\; mg\,h \tag{3}$$

wenn wir die Perle mit Geschwindigkeit 0 bei $P_1 = (x_0, z_0) = (0, h)$ starten lassen. Zeigen Sie weiterhin: Aus Gleichung (3) folgt

$$\dot{x} \;\; = \;\; \sqrt{2g}\,\sqrt{\tfrac{h - f(x)}{1 + f'(x)^2}}\;. \tag{4}$$

d) Wir substituieren jetzt $f(x) \to q(x)$ durch

$$q(x) \;\; := \;\; h \, - \, f(x)\,, \qquad q'(x) \; = \; -f'(x)\,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von (4): Die Zeit T, die benötigt wird, um zum Endpunkt $P_2 = (0, \ell)$ zu gelangen, ist gegeben durch

$$T \;\; = \;\; T(q) \;\; = \;\; \tfrac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\ell \sqrt{\tfrac{1+q'(x)^2}{q(x)}}\;dx \tag{5}$$

Das Brachistochronen-Problem besteht nun darin, dasjenige $q = q(x)$ zu finden, also die genaue Form des Drahtes so zu bestimmen, dass die Durchlaufzeit $T = T(q)$ aus Gleichung (5) minimiert wird. Das machen wir in der zweiten Aufgabe.

..bitte wenden

[1] die werden wir dann aber gar nicht weiter benutzen, sondern wir benutzen die Gleichung (4) weiter unten

2.Aufgabe: Wir betrachten dasselbe Setup wie in Aufgabe 1. Wir wollen das Funktional $T = T(q)$ aus Gleichung (5) minimieren. Wir lassen den Vorfaktor weg und nennen den Integranden $L = L(q, q')$, um der Notation aus dem Theorem 2.5.1 aus dem `week6.pdf` zu entsprechen. Also, wir betrachten das Minimierungsproblem

$$I(q) \quad := \quad \int_0^\ell L\big(\, q(x) \,,\, q'(x) \,\big)\, dx \quad \stackrel{!}{\to} \quad \min \tag{6}$$

mit der Funktion[2]

$$L(q, q') \quad = \quad \sqrt{\tfrac{1+q'(x)^2}{q(x)}} \tag{7}$$

Nach dem Theorem 2.5.1 (das t ist dann hier das x) ist dann notwendige Bedingung für ein Minimum das Bestehen der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\tfrac{d}{dx}\tfrac{\partial L}{\partial q'} \;-\; \tfrac{\partial L}{\partial q} \quad = \quad 0 \tag{8}$$

Da wir eine Euler-Lagrange-Gleichung haben und das L nicht explizit von dem x abhängt, können wir ebenfalls das Theorem 2.5.2 anwenden und bekommen, dass die Funktion

$$H(q, q') \quad := \quad \tfrac{\partial L}{\partial q'}\, q' \;-\; L \tag{9}$$

konstant ist, sie ist unabhängig von $x \in [0, \ell]$. Zeigen Sie nun:

a) Es gilt

$$H(q, q') \quad = \quad -\,\frac{1}{\sqrt{q(x)[1 + q'(x)^2]}} \quad = \quad \text{constant} \quad =: \quad -\,\frac{1}{\sqrt{c}} \tag{10}$$

b) Wählen wir anstatt $(x, z) = (x, q_x)$ eine Parametrisierung der Form $(x, z) = (x_t, z_t)$, dann ist (10) äquivalent zu

$$z(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) \quad = \quad c\,\dot{x}^2 \tag{11}$$

c) Zeigen Sie durch Nachrechnen: Die Gleichung (11) wird gelöst durch

$$x_t \quad = \quad \tfrac{c}{2}\big[\, 2t \;-\; \sin(2t) \,\big] \tag{12}$$

$$z_t \quad = \quad \tfrac{c}{2}\big[\, 1 \;-\; \cos(2t) \,\big] \tag{13}$$

wobei das c und der Parameterbereich für das $t \in [0, t_{\text{end}}]$, also das t_{end}, durch die Randbedingungen $(x_0, h - z_0) = (0, h)$ und $(x_{t_{\text{end}}}, h - z_{t_{\text{end}}}) = (\ell, 0)$ (wegen $f = h - q$) geeignet festzulegen sind. Das heisst, es muss gelten

$$(x_0, z_0) \;=\; (0, 0)\;, \qquad (x_{t_{\text{end}}}, z_{t_{\text{end}}}) \;=\; (\ell, h)\;. \tag{14}$$

d) Berechnen Sie c und t_{end} und plotten Sie die Lösungskurve $f = h - z_t$ für den konkreten Fall

$$h \;=\; 20\,\text{cm}$$
$$\ell \;=\; 100\,\text{cm}$$

mit Hilfe eines geeigneten numerischen Verfahrens.

[2]das ist jetzt natürlich nicht das L aus Aufgabe 1a, sondern der Integrand aus Gleichung (5) aus Aufg 1e