Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2021/22

5. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: In dieser Aufgabe wollen wir das Lemma 2.4.3 aus dem `week5.pdf` beweisen. Die Aussage war folgende: Es sei A eine beliebige reelle oder komplexe $n \times n$ Matrix und Ω sei eine $n \times n$ Matrix mit

$$\Omega^2 \;=\; A \tag{1}$$

Weiter bezeichne Id die $n \times n$ Einheitsmatrix. Dann gilt[1]

$$\exp\left\{ t \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right\} \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t)\,\Omega^{-1} \\ -\sin(\Omega t)\,\Omega & \cos(\Omega t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

wobei die $n \times n$ Matrizen $\cos(\Omega t)$ und $\sin(\Omega t)$ über die Potenzreihenentwicklungen der Sinus- und Cosinus-Funktion definiert sind. Gehen Sie zum Beweis etwa folgendermassen vor:

a) Erinnern Sie sich an die Potenzreihenentwicklungen der Funktionen e^x, $\cos x$ und $\sin x$.

b) Berechnen Sie die Potenzen

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^n$$

Unterscheiden Sie dazu die Fälle $n = 2k$ und $n = 2k + 1$.

c) Schreiben Sie die Potenzreihenentwicklung von

$$\exp\left\{ t \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

hin und zerlegen Sie die Summe in zwei Teilsummen, eine Teilsumme mit den geraden Potenzen und die andere Teilsumme mit den ungeraden Potenzen.

2.Aufgabe: Das linearisierte Doppelpendel ist gegeben durch das DGL-System

$$T \begin{pmatrix} \ddot\varphi_{1,t} \\ \ddot\varphi_{2,t} \end{pmatrix} \;+\; V \begin{pmatrix} \varphi_{1,t} \\ \varphi_{2,t} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

mit den Matrizen

$$T \;=\; \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \ell_1 & \ell_2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{pmatrix}, \qquad V \;=\; \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \tag{4}$$

a) Betrachten Sie den Grenzfall $m_1 \to 0$ und geben Sie die allgemeine Lösung von (3) an.

[1] es sei also vorausgesetzt, dass Ω^{-1} existiert

b) Wir wollen jetzt den Fall gleicher Massen und gleicher Pendellängen betrachten, also

$$m_1 = m_2 =: m \tag{5}$$
$$\ell_1 = \ell_2 =: \ell \tag{6}$$

Geben Sie für diesen Fall die allgemeine Lösung von (3) an. Schauen Sie sich dazu noch einmal die Herleitung der allgemeinen Lösung auf den letzten Seiten von `week5.pdf` an und berechnen Sie insbesondere konkret die Matrix B der Eigenvektoren.

c) Wählen Sie jetzt noch konkreter

$$m_1 = m_2 = m = 1\,\mathrm{kg} \tag{7}$$
$$\ell_1 = \ell_2 = \ell = 1\,\mathrm{m} \tag{8}$$

und betrachten Sie die folgenden Anfangsbedingungen: Die Anfangsgeschwindigkeiten seien null,

$$\dot\varphi_{1,0} = \dot\varphi_{2,0} = 0 \tag{9}$$

und die erste Masse, die obere Masse, lenken wir etwa um $5^\circ = \pi/36 \approx 0.0873 \ll 1$ aus, bei einer Pendellänge von $\ell = 1\,\mathrm{m}$ sind das dann 8.73 cm. Die zweite Masse, die untere Masse, werde nicht ausgelenkt, also

$$\varphi_{1,0} = \pi/36 \tag{10}$$
$$\varphi_{2,0} = 0 \tag{11}$$

Plotten Sie $\varphi_{1,t}$ und $\varphi_{2,t}$ in einem Diagramm für Zeiten $t \in [0, T]$, wobei der Zeithorizont T so gewählt werden sollte, dass man im wesentlichen sieht, was so passiert. Wählen Sie dazu eine Software, mit der Sie sich vertraut fühlen, etwa Excel, Matlab oder R.