

4. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamik der Teilchen und Felder

1. Aufgabe: Wir betrachten die Bewegung eines kleinen Kugelchens der Masse m auf einem Kegel K unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F} = (0, 0, -mg)$. Der Kegel habe die Parametrisierung

$$K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \vec{x}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ cr \end{pmatrix}, (r, \varphi) \in [0, R] \times [0, 2\pi) \right\}$$

wobei c eine positive Konstante ist.

- Wählen Sie (r, φ) als verallgemeinerte Koordinaten und geben Sie die Lagrange-Funktion an.
- Leiten Sie die Bewegungsgleichungen¹ für r und φ her.

2. Aufgabe: Wir betrachten das Doppelpendel so wie es in Beispiel 2 in `week4.pdf` spezifiziert ist. Schauen Sie sich dazu insbesondere noch einmal die Abbildung auf Seite 3 an. Wählen Sie dann φ_1 und φ_2 als die verallgemeinerten Koordinaten.

- Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$L = \frac{m_1+m_2}{2} \ell_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} \ell_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ + (m_1 + m_2)g \ell_1 \cos \varphi_1 + m_2 g \ell_2 \cos \varphi_2 .$$

- Zeigen Sie, dass sich die Bewegungsgleichungen auf die folgende Form bringen lassen:

$$\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \ell_1 \ddot{\varphi}_1 + \ell_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \ell_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)g \sin \varphi_1 = 0 \\ \ell_2 \ddot{\varphi}_2 + \ell_1 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \ell_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + g \sin \varphi_2 = 0 .$$

Konzeptionell ist Aufgabe 2 wie Aufgabe 1, allerdings deutlich rechenaufwändiger. Wir rechnen sie in der nächsten Vorlesung vor. Wir werden da das linearisierte Doppelpendel diskutieren und etwas allgemeiner Systeme von n gekoppelten Oszillatoren betrachten.

¹ ‘die Bewegungsgleichungen’ meint dasselbe wie ‘die Euler-Lagrange-Gleichungen’