

3. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamik der Teilchen und Felder

1. Aufgabe: Wir parametrisieren die Bewegung eines Teilchens der Masse m im \mathbb{R}^3 durch Kugelkoordinaten,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

mit $r \in [0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\theta \in [0, \pi]$. Wir führen folgende Basisvektoren ein:

$$\vec{e}_r := \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi := \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta := \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

Der Bahndrehimpuls ist definiert durch den Vektor¹

$$\vec{L} := \vec{x} \times \vec{p} = m \vec{x} \times \dot{\vec{x}}$$

Zeigen Sie:

- a) Für eine kräftefreie Bewegung $m\ddot{\vec{x}} = 0$ wie wir sie in Beispiel 1 von `week3.pdf` betrachtet haben, gilt

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{0},$$

das heisst, \vec{L} ist eine Erhaltungsgrösse.

- b) Für eine Bewegung unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ und einer Zwangskraft der Form $\vec{Z} = \lambda \vec{e}_r$ gilt nicht mehr $\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{0}$, aber es gilt noch

$$\frac{d}{dt} L_3 = 0$$

wobei L_3 die z-Komponente des Drehimpulses $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ ist.

- c) In Kugelkoordinaten gilt

$$\vec{L} = m r^2 \{ \dot{\theta} \vec{e}_\varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\theta \}$$

und

$$L_3 = m r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta.$$

¹das \vec{L} für den Bahndrehimpuls bitte nicht verwechseln mit dem L für die Lagrange-Funktion

2. Aufgabe: Wir betrachten die Bewegung eines Kügelchens der Masse m unter dem Einfluss der Schwerkraft in einer halbkugelförmigen Schüssel. In Beispiel 2 von `week3.pdf` hatten wir dazu die Bewegung durch Kugelkoordinaten parametrisiert,

$$\vec{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos \varphi_t \sin \theta_t \\ \sin \varphi_t \sin \theta_t \\ \cos \theta_t \end{pmatrix}$$

wobei R jetzt der konstante Radius der Schüssel ist, und wir hatten mit Hilfe des Lagrange-Formalismus die folgenden Bewegungsgleichungen hergeleitet:

$$\frac{d}{dt} \{ \dot{\varphi} \sin^2 \theta \} = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{R} \sin \theta = 0 \quad (2)$$

- a) Wie müssen die Anfangsbedingungen gewählt werden, wenn sich das Kügelchen auf horizontalen Kreisen bewegen soll? Versuchen Sie, alle solche möglichen Anfangsbedingungen zu charakterisieren.
- b) Für $\dot{\varphi} = 0$ können wir die Bewegung auch als die eines ebenen Fadenpendels mit der Pendellänge R auffassen. Die Ruheposition des Pendels befindet sich bei $\vec{x} = (0, 0, -R)$ oder $\theta = \pi$. Substituieren Sie $\theta = \pi - \alpha$ und betrachten Sie den Fall kleiner Auslenkungen α , so dass die Näherung $\sin \alpha \approx \alpha$ gerechtfertigt ist. Geben Sie für diesen Fall die Bewegungsgleichung für α an sowie die allgemeine Lösung.