

2. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamik der Teilchen und Felder

1. Aufgabe: Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens in der (x, y) -Ebene und parametrisieren die Bewegung durch Polarkoordinaten,

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = r_t \begin{pmatrix} \cos \varphi_t \\ \sin \varphi_t \end{pmatrix}$$

Weiterhin definieren wir die Vektoren

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi_t \\ \sin \varphi_t \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_t \\ \cos \varphi_t \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

a) Die Vektoren \vec{e}_r und \vec{e}_φ bilden eine Orthonormalbasis.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r &= \dot{\varphi}_t \vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi}_t \vec{e}_r \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

d) Die kinetische Energie ist gegeben durch

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 = \frac{m}{2} \{ \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \}$$

e) Es gilt

$$\ddot{\vec{x}} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$$

2. Aufgabe: Wir betrachten die Bewegung eines kräftefreien Teilchens in der (x, y) -Ebene und parametrisieren die Bewegung durch Polarkoordinaten. Wir betrachten also dasselbe Setting wie in Aufgabe 1. Wenn keine äusseren Kräfte auf das Teilchen wirken, ist die Bewegungsgleichung einfach gegeben durch

$$m \ddot{\vec{x}} = 0 \tag{1}$$

Nach Aufgabe (1e) ist Gleichung (1) äquivalent zum System

$$\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = 0 \tag{2}$$

$$2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi} = 0 \tag{3}$$

Lesen Sie sich jetzt das Material aus `week2.pdf` von der Vorlesungshomepage durch. Schauen Sie sich insbesondere den Teil (b) des Theorems 2.1.2 auf der letzten Seite an.

- a) Wählen Sie $(u, v) = (r, \phi)$ als die verallgemeinerten Koordinaten und geben Sie die Lagrange-Funktion L an (haben Sie in Aufgabe 1 schon berechnet..).
- b) Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen her und zeigen Sie, dass sie äquivalent sind zum System (2) und (3).