

11. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamik der Teilchen und Felder

1. Aufgabe: Nächste Woche werden wir die Aussage von Teil (c) dieser Aufgabe benötigen: Gegeben seien die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a^+ und a wie in Üblatt 9 durch

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{d}{d\xi} \right) \\ a^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{d}{d\xi} \right) \end{aligned}$$

Wir haben den Kommutator

$$[a, a^+] = 1$$

und mit der einfachen Version der Baker-Campbell-Hausdorff Formel aus der 2. Aufgabe vom Üblatt 10 oder aus dem Theorem 4.1.3 aus der Vorlesung gilt für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$

$$e^{\lambda(a^+ + a)} = e^{\frac{\lambda^2}{2}} e^{\lambda a^+} e^{\lambda a} \quad (1)$$

Wenn wir die linke und die rechte Seite von (1) nach Potenzen von λ entwickeln und dann die Koeffizienten von λ^m vergleichen, erhalten wir die folgende Formel:

$$(a^+ + a)^m = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{m!}{2^k k!} \sum_{j=0}^{m-2k} \frac{(a^+)^{m-2k-j} a^j}{(m-2k-j)! j!} \quad (2)$$

Der Nutzen dieser Formel besteht darin, dass auf der rechten Seite von (2) die a^+ immer links von den a 's stehen.

a) Überprüfen Sie die Formel für den Fall $m = 2$, indem Sie die linke und die rechte Seite von (2) explizit ausschreiben.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von (2): Es gilt die Formel

$$\begin{aligned} (a^+ + a)^4 &= (a^+)^4 + 4(a^+)^3 a + 6(a^+)^2 a^2 + 4a^+ a^3 + a^4 \\ &\quad + 6(a^+)^2 + 12a^+ a + 6a^2 + 3 . \end{aligned}$$

c) Zeigen Sie jetzt mit Hilfe von Teil (b) die Aussage von Lemma 4.2.2 aus der Vorlesung 12, das ist die folgende Formel:

$$(a^+ + a)^4 = (a^+)^4 + (a^+)^2 (4\hat{n} + 6) + a^2 (4\hat{n} - 2) + a^4 + 6\hat{n}(\hat{n} + 1) + 3$$

mit $\hat{n} := a^+ a$.