Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2021/22

Lösungen zum 9. Übungsblatt
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: a) Es ist

$$\begin{aligned} aa^+ &= \tfrac{1}{2}\big(\xi + \tfrac{d}{d\xi}\big)\big(\xi - \tfrac{d}{d\xi}\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\big\{\xi^2 - \tfrac{d^2}{d\xi^2} - \xi\tfrac{d}{d\xi} + \tfrac{d}{d\xi}\xi\big\} \\ &= \tfrac{1}{2}\big\{\xi^2 - \tfrac{d^2}{d\xi^2} - \xi\tfrac{d}{d\xi} + 1 + \xi\tfrac{d}{d\xi}\big\} \\ &= \tfrac{1}{2}\big\{\xi^2 - \tfrac{d^2}{d\xi^2} + 1\big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^+a &= \tfrac{1}{2}\big(\xi - \tfrac{d}{d\xi}\big)\big(\xi + \tfrac{d}{d\xi}\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\big\{\xi^2 - \tfrac{d^2}{d\xi^2} + \xi\tfrac{d}{d\xi} - \tfrac{d}{d\xi}\xi\big\} \\ &= \tfrac{1}{2}\big\{\xi^2 - \tfrac{d^2}{d\xi^2} + \xi\tfrac{d}{d\xi} - 1 - \xi\tfrac{d}{d\xi}\big\} \\ &= \tfrac{1}{2}\big\{\xi^2 - \tfrac{d^2}{d\xi^2} - 1\big\} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} [a, a^+] &= aa^+ - a^+a \\ &= \tfrac{1}{2}\big\{\xi^2 - \tfrac{d^2}{d\xi^2} + 1\big\} - \tfrac{1}{2}\big\{\xi^2 - \tfrac{d^2}{d\xi^2} - 1\big\} \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

b) Beweis mit Induktion: Für $n = 1$ reduziert sich die Aussage auf Teil (a). Die Formel gelte für n,

$$\big[\, a\,,\, (a^+)^n \,\big] = n\,(a^+)^{n-1} \quad . \tag{1}$$

Wir bekommen dann für $n + 1$

$$\begin{aligned} \big[\, a\,,\, (a^+)^{n+1} \,\big] &= a(a^+)^{n+1} - (a^+)^{n+1}a \\ &= a(a^+)^n a^+ - (a^+)^n a^+ a \\ &= a(a^+)^n a^+ - (a^+)^n aa^+ + (a^+)^n aa^+ - (a^+)^n a^+ a \\ &= \big\{a(a^+)^n - (a^+)^n a\big\}a^+ + (a^+)^n\big\{aa^+ - a^+a\big\} \\ &= \big[\, a\,,\, (a^+)^n \,\big]a^+ + (a^+)^n \times [a, a^+] \\ &\overset{(1),(a)}{=} n\,(a^+)^{n-1}a^+ + (a^+)^n \times 1 \\ &= (n+1)\,(a^+)^n \end{aligned}$$

und die Formel ist auch für $n + 1$ bewiesen.

c) Mit der Definition

$$h_n \quad := \quad \tfrac{1}{\sqrt{n!}}\,(a^+)^n\, h_0$$

und dem Kommutator aus Teil (b) bekommen wir

$$\begin{aligned}
a\, h_n \quad &= \quad \tfrac{1}{\sqrt{n!}}\, a(a^+)^n\, h_0 \\
&= \quad \tfrac{1}{\sqrt{n!}} \left\{ a(a^+)^n \;-\; (a^+)^n a \right\} h_0 \;+\; (a^+)^n a\, h_0 \\
&= \quad \tfrac{1}{\sqrt{n!}} \left[\, a\,,\; (a^+)^n \right] h_0 \;+\; 0 \\
&= \quad \tfrac{1}{\sqrt{n!}}\, n\, (a^+)^{n-1}\, h_0 \;+\; 0 \\
&= \quad \tfrac{1}{\sqrt{(n-1)!}}\, \sqrt{n}\, (a^+)^{n-1}\, h_0 \\
&= \quad \sqrt{n}\; h_{n-1}
\end{aligned}$$

Weiterhin,

$$\begin{aligned}
a^+\, h_n \quad &= \quad a^+ \tfrac{1}{\sqrt{n!}}\, (a^+)^n\, h_0 \\
&= \quad \sqrt{n+1}\; \tfrac{1}{\sqrt{(n+1)!}}\, (a^+)^{n+1}\, h_0 \\
&= \quad \sqrt{n+1}\;\; h_{n+1}
\end{aligned}$$

und damit

$$a^+ a\, h_n \quad = \quad a^+ \sqrt{n}\; h_{n-1} \quad = \quad \sqrt{n}\,\sqrt{n}\; h_n \quad = \quad n\, h_n \quad .$$

d) Mit dem Skalarprodukt[1]

$$\langle f, g\rangle \quad := \quad \textstyle\int_{\mathbb{R}} f(\xi)\overline{g(\xi)}\, d\xi$$

gilt

$$\langle af, g\rangle \quad = \quad \langle f, a^+ g\rangle$$

denn

$$\begin{aligned}
\langle af, g\rangle \quad = \quad \textstyle\int_{\mathbb{R}} (af)(\xi)\overline{g(\xi)}\, d\xi \quad &= \quad \tfrac{1}{\sqrt{2}} \textstyle\int_{\mathbb{R}} (\xi + \tfrac{d}{d\xi}) f(\xi)\overline{g(\xi)}\, d\xi \\
&\overset{\text{part.Int.}}{=} \quad \tfrac{1}{\sqrt{2}} \textstyle\int_{\mathbb{R}} f(\xi)\, (\xi - \tfrac{d}{d\xi})\overline{g(\xi)}\, d\xi \\
&= \quad \tfrac{1}{\sqrt{2}} \textstyle\int_{\mathbb{R}} f(\xi)\overline{(\xi - \tfrac{d}{d\xi}) g(\xi)}\, d\xi \quad = \quad \langle f, a^+ g\rangle
\end{aligned}$$

wobei wir also bei der partiellen Integration benutzt haben, dass die Funktionen f und g im Unendlichen verschwinden, so dass die Randterme 0 sind. Damit bekommen wir für Indizes m, n mit, sagen wir, $m \geq n$:

$$\langle h_m, h_n\rangle \quad = \quad \tfrac{1}{\sqrt{m!}}\, \tfrac{1}{\sqrt{n!}} \;\times\; \Big\langle\, (a^+)^m h_0\;,\; (a^+)^n h_0 \,\Big\rangle \tag{2}$$

mit

[1] die komplexe Konjugation im 2.Argument, bei dem g, könnten wir an dieser Stelle auch weglassen, da die h_n's alle reell sind; quantenmechanische Wellenfunktionen sind aber typischerweise komplexe Funktionen

$$\begin{aligned}
\left\langle (a^+)^m h_0 \,,\, (a^+)^n h_0 \right\rangle &= \left\langle (a^+)^{m-1} h_0 \,,\, a(a^+)^n h_0 \right\rangle \\
&\overset{a\,h_0=0}{=} \left\langle (a^+)^{m-1} h_0 \,,\, [a,(a^+)^n] h_0 \right\rangle \\
&\overset{\text{Teil(b)}}{=} \left\langle (a^+)^{m-1} h_0 \,,\, n(a^+)^{n-1} h_0 \right\rangle \\
&= n \left\langle (a^+)^{m-1} h_0 \,,\, (a^+)^{n-1} h_0 \right\rangle
\end{aligned}$$

Das können wir n-mal wiederholen und bekommen

$$\begin{aligned}
\left\langle (a^+)^m h_0 \,,\, (a^+)^n h_0 \right\rangle &= n \left\langle (a^+)^{m-1} h_0 \,,\, (a^+)^{n-1} h_0 \right\rangle \\
&= n(n-1) \left\langle (a^+)^{m-2} h_0 \,,\, (a^+)^{n-2} h_0 \right\rangle \\
&\;\vdots \\
&= n! \left\langle (a^+)^{m-n} h_0 \,,\, (a^+)^{n-n} h_0 \right\rangle \\
&= n! \left\langle (a^+)^{m-n} h_0 \,,\, h_0 \right\rangle
\end{aligned}$$

Ist $m-n > 0$, können wir noch ein a^+ mit einem a auf die rechte Seite bringen und erhalten $ah_0 = 0$. Und für $m = n$ erhalten wir

$$\left\langle (a^+)^n h_0 \,,\, (a^+)^n h_0 \right\rangle = n! \left\langle h_0 \,,\, h_0 \right\rangle = n!$$

Mit dem Vorfaktor in (2),

$$\tfrac{1}{\sqrt{m!}} \tfrac{1}{\sqrt{n!}} \overset{m=n}{=} \tfrac{1}{n!}$$

folgt dann also die Orthonormalität der h_n.

f) Wegen

$$h_n = \tfrac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n h_0$$

ist die Formel

$$h_n(\xi) = \tfrac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

äquivalent zu

$$\left(\xi - \tfrac{d}{d\xi} \right)^n h_0 = \tfrac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} H_n(\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

oder

$$\left(\xi - \tfrac{d}{d\xi} \right)^n e^{-\frac{\xi^2}{2}} = H_n(\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{2}} \tag{3}$$

Für $n = 0$ ist Formel (3) offensichtlich korrekt, es ist $H_0(\xi) = 1$. Formel (3) gelte für n. Dann:

$$\begin{aligned}
\left(\xi - \tfrac{d}{d\xi}\right)^{n+1} e^{-\frac{\xi^2}{2}} &= \left(\xi - \tfrac{d}{d\xi}\right)\left\{ H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right\} \\
&= \xi\, H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} - \tfrac{d}{d\xi}\left\{ H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right\} \\
&= \xi\, H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} - H_n'(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} + H_n(\xi)\, \xi\, e^{-\frac{\xi^2}{2}} \\
&= \left[2\xi\, H_n(\xi) - H_n'(\xi) \right] e^{-\frac{\xi^2}{2}} \\
&= H_{n+1}(\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile die Rekursionsgleichung für die Hermite-Polynome

$$H_{n+1}(\xi) \quad := \quad 2\xi\, H_n(\xi) - H_n'(\xi)$$

benutzt haben. Damit ist auch der Teil (f) bewiesen.