Hochschule RheinMain | WS 2021/22
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen zum 8. Übungsblatt
Dynamik der Teilchen und Felder

2.Aufgabe: Wir benötigen die Aussagen (a) und (b) aus dem Theorem 3.1.4, das war folgendes:

Theorem 3.1.4: Es sei $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$I(\varphi_t) \;:=\; \int_0^{\varphi_t} \frac{d\varphi}{|\cos\varphi|^{1-\frac{2}{\alpha}}} \tag{1}$$

Weiter sei $C : \mathbb{R} \to [-1,1]$ gegeben durch

$$C(s) \;:=\; \cos\big[I^{-1}(s)\big] \tag{2}$$

Dann gilt:

a) Das $C(s)$ ist eine $2c$-periodische Funktion mit

$$c \;:=\; \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{|\cos\varphi|^{1-\frac{2}{\alpha}}} \tag{3}$$

b) Für $s \in [0, 2c]$ gilt:

$$C(s) \;=\; \begin{cases} +\,C_0(s) & \text{falls} \;\; s \in \big[\,0\,,\,\frac{c}{2}\,\big] \\ -\,C_0(s-c) & \text{falls} \;\; s \in \big(\,\frac{c}{2}\,,\,\frac{3c}{2}\,\big] \\ +\,C_0(s-2c) & \text{falls} \;\; s \in \big(\,\frac{3c}{2}\,,\,2c\,\big] \end{cases} \tag{4}$$

mit der positiven Funktion

$$\begin{aligned} C_0 \;\; &: \;\; \big[\,-\tfrac{c}{2}\,,\,\tfrac{c}{2}\,\big] \;\to\; [\,0\,,\,1\,] \\ C_0(s) \;&:=\; \cos\big[I_0^{-1}(s)\big] \end{aligned} \tag{5}$$

und I_0 ist die Einschränkung von I auf das Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$, das heisst, I_0 ist die bijektive Funktion

$$\begin{aligned} I_0 \;\; &: \;\; \big[\,-\tfrac{\pi}{2}\,,\,\tfrac{\pi}{2}\,\big] \;\to\; \big[\,-\tfrac{c}{2}\,,\,\tfrac{c}{2}\,\big] \\ I_0(\varphi) \;&:=\; \int_0^{\varphi} \frac{d\phi}{(\cos\phi)^{1-\frac{2}{\alpha}}}\;. \end{aligned} \tag{6}$$

Es gilt $\;C_0\big(-\tfrac{c}{2}\big) \;=\; C_0\big(+\tfrac{c}{2}\big) \;=\; 0\;.$

Damit bekommen wir also die folgenden c's: Für $\alpha = 2$,

$$c \;=\; \int_0^\pi \frac{d\varphi}{|\cos\varphi|^{1-\frac{2}{2}}} \;=\; \int_0^\pi d\varphi \;=\; \pi$$

und für $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned} c \;&=\; \int_0^\pi \frac{d\varphi}{|\cos\varphi|^{1-\frac{2}{1}}} \;=\; \int_0^\pi d\varphi\,|\cos\varphi| \\ &=\; \int_0^{\pi/2} d\varphi\,\cos\varphi \;+\; \int_{\pi/2}^\pi d\varphi\,(-\cos\varphi) \;=\; 1 - (-1) \;=\; 2 \end{aligned}$$

Die Funktion C_0 ist definiert durch

$$C_0(s) \;:=\; \cos\big[I_0^{-1}(s)\big]$$

wir müssen also jeweils das I_0^{-1} bestimmen. Für $\alpha = 2$ haben wir

$$I_0(\varphi) \;=\; \int_0^\varphi \frac{d\phi}{(\cos\phi)^{1-\frac{2}{2}}} \;=\; \int_0^\varphi d\phi \;=\; \varphi$$

und wir bekommen

$$I_0^{-1}(s) \;=\; s$$

und damit

$$C_0(s) \;=\; \cos\big[I_0^{-1}(s)\big] \;=\; \cos(s) \;\;.$$

Für $\alpha = 1$ ist

$$\begin{aligned} I_0(\varphi) \;&=\; \int_0^\varphi \frac{d\phi}{(\cos\phi)^{1-\frac{2}{1}}} \;=\; \int_0^\varphi d\phi\,|\cos\phi| \\ &\overset{\varphi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}{=}\; \int_0^\varphi d\phi\,\cos\phi \;=\; \sin\varphi \end{aligned}$$

und wir bekommen

$$I_0^{-1}(s) \;=\; \arcsin(s)$$

Wegen $\arcsin(s) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und da $\cos\varphi$ auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ eine positive Funktion ist, erhalten wir dann

$$\begin{aligned} C_0(s) \;&=\; \cos\big[I_0^{-1}(s)\big] \;=\; \cos\big[\arcsin(s)\big] \\ &=\; +\sqrt{1 - \sin^2[\arcsin(s)]} \\ &=\; +\sqrt{1 - s^2} \;\;. \end{aligned}$$

3.Aufgabe: Mit der mehrdimensionalen Kettenregel bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{H}}{\partial\varepsilon} \;&=\; \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varepsilon} \;+\; \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\varepsilon} \\ \frac{\partial\tilde{H}}{\partial\varphi} \;&=\; \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi} \;+\; \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\varphi} \end{aligned}$$

oder, wenn wir die Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{x} \;=\; \frac{\partial H}{\partial p}\,, \qquad \dot{p} \;=\; -\,\frac{\partial H}{\partial x}$$

benutzen,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varepsilon} &= -\,\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\,\dot{p} \;+\; \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\,\dot{x} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varphi} &= -\,\frac{\partial x}{\partial \varphi}\,\dot{p} \;+\; \frac{\partial p}{\partial \varphi}\dot{x} \end{aligned}$$

In Matrix-Notation,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} & -\,\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial p}{\partial \varphi} & -\,\frac{\partial x}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix}$$

Weiterhin,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\,\dot{\varepsilon} \;+\; \frac{\partial x}{\partial \varphi}\,\dot{\varphi} \\ \dot{p} &= \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\,\dot{\varepsilon} \;+\; \frac{\partial p}{\partial \varphi}\,\dot{\varphi} \end{aligned}$$

oder in Matrix-Notation,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial p}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Also,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} & -\,\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial p}{\partial \varphi} & -\,\frac{\partial x}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial p}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \;=:\; J \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \tag{7}$$

mir der Matrix

$$\begin{aligned} J \;&:=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} & -\,\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial p}{\partial \varphi} & -\,\frac{\partial x}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial p}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial p}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} & 0 \end{pmatrix} \;=:\; \begin{pmatrix} 0 & -j(\varepsilon,\varphi) \\ j(\varepsilon,\varphi) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

mit der skalaren Funktion

$$j(\varepsilon,\varphi) \;:=\; \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\frac{\partial p}{\partial \varphi} \;-\; \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\,\cos\varphi \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -\sqrt{2\varepsilon}\,\sin\varphi \\ \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\,\sin\varphi \\ \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= \sqrt{2\varepsilon}\,\cos\varphi \end{aligned}$$

und bekommen somit

$$j(\varepsilon,\varphi) \;=\; \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\frac{\partial p}{\partial \varphi} \;-\; \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \;=\; \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \;=\; 1\,.$$

Setzt man das in die Gleichungen (8) und (7) ein, folgt die Behauptung.