Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2021/22

Lösungen zum 7. Übungsblatt
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: **a)** Die verallgemeinerten Impulse p_j sind definiert durch

$$p_j \ := \ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{1}$$

Mit der Lagrange-Funktion

$$L \ = \ \frac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^2 \ = \ \frac{m}{2}\left\{ \dot{r}^2 \ + \ r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta \ + \ r^2\dot{\theta}^2 \right\} \tag{2}$$

erhalten wir dann also:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\,\dot{\theta} \end{aligned} \tag{3}$$

b) Nach Definition ist

$$H \ = \ \sum_{i=1}^{f} p_i\,\dot{q}_i \ - \ L$$

In unserem Fall haben wir also

$$\begin{aligned} H &= p_r\,\dot{r} + p_\varphi\,\dot{\varphi} + p_\theta\,\dot{\theta} - \frac{m}{2}\left\{ \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2 \right\} \\ &= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{m}{2}\left\{ \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2 \right\} \\ &= \frac{m}{2}\left\{ \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2 \right\} \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} \\ &= \frac{1}{2m}\left\{ p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right\} = H(r,\varphi,\theta,p_r,p_\varphi,p_\theta) \end{aligned}$$

c) Die Hamiltonschen Gleichungen lauten

$$\dot{q}_j \ = \ \frac{\partial H}{\partial p_j} \tag{4}$$

$$\dot{p}_j \ = \ -\frac{\partial H}{\partial q_j} \tag{5}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_r} &= \frac{p_r}{m} \\ \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} &= \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta} \\ \frac{\partial H}{\partial p_\theta} &= \frac{p_\theta}{mr^2} \end{aligned} \tag{6}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial r} &= -\frac{1}{mr^3}\left\{ \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} + p_\theta^2 \right\} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \theta} &= -\frac{p_\varphi^2 \cos\theta}{mr^2 \sin^3\theta} \end{aligned} \tag{7}$$

Also bekommen wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{p_r}{m} \\ \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2\theta} \\ \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{mr^2} \end{aligned} \tag{8}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= +\frac{1}{mr^3}\left\{ \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} + p_\theta^2 \right\} \\ \dot{p}_\varphi &= 0 \\ \dot{p}_\theta &= +\frac{p_\varphi^2 \cos\theta}{mr^2 \sin^3\theta} \end{aligned} \tag{9}$$

d) Die Gleichungen (8) sind äquivalent zu den Definitionen der verallgemeinerten Impulse in (3). Diese Definitionen setzen wir auf der linken und der rechten Seite von (9) ein und wir sollten dann die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta - r\dot{\theta}^2 &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left\{ r^2 \dot{\varphi} \sin^2\theta \right\} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left\{ r^2\dot{\theta} \right\} - r^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta &= 0\,. \end{aligned} \tag{10}$$

bekommen. Aus der ersten Gleichung von (9) erhalten wir

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= +\frac{1}{mr^3}\left\{ \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} + p_\theta^2 \right\} \\ &= +\frac{1}{mr^3}\left\{ \frac{(mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi})^2}{\sin^2\theta} + (mr^2\dot{\theta})^2 \right\} \\ &= +mr\left\{ \frac{(\sin^2\theta\,\dot{\varphi})^2}{\sin^2\theta} + \dot{\theta}^2 \right\} \end{aligned}$$

oder

$$\ddot{r} - r\left\{\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right\} = 0 \tag{11}$$

und das ist äquivalent zur ersten Gleichung in (10). Die zweite Gleichung von (9) ist

$$\frac{d}{dt}\left\{ mr^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi} \right\} = 0 \tag{12}$$

und das ist offensichtlich äquivalent zur zweiten Gleichung in (10). Und die dritte Gleichung von (9) ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\{ mr^2\dot{\theta} \right\} &= +\frac{\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}\, p_\varphi^2 \\ &= +\frac{\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}\left(mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}\right)^2 \\ &= mr^2\cos\theta\sin\theta\,\dot{\varphi}^2 \end{aligned} \tag{13}$$

und das ist offensichtlich äquivalent zur letzten Gleichung in (10).

2.Aufgabe: Beweisen Sie das Theorem 3.1.3 aus der Vorlesung, aus dem `week7.pdf`, das war die folgende Aussage: Es sei $L = T - V$ die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems und die kinetische Energie T und die potentielle Energie V seien von der Form

$$T \;=\; T(q,\dot q) \;=\; \sum_{j,k=1}^{f} \dot q_j \dot q_k \, t_{jk}(q) \tag{14}$$

mit $t_{jk}(q) = t_{kj}(q)$ und die potentielle Energie hänge nur von den q's ab, aber nicht von den $\dot q$. Also

$$V \;=\; V(q) \;=\; V(q_1, \cdots, q_f) \tag{15}$$

Dann gilt: Die Hamilton-Funktion H ist gegeben durch die Gesamtenergie, es ist

$$H \;=\; T + V\,. \tag{16}$$

Beweis: Die verallgemeinerten Impulse p_k sind gegeben durch

$$\begin{aligned} p_i \;&=\; \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \;=\; \frac{\partial}{\partial \dot q_i}\left\{ \sum_{j,k=1}^{f} \dot q_j \dot q_k \, t_{jk}(q) \;-\; V(q) \right\} \\ &=\; \sum_{k=1}^{f} \dot q_k \, t_{ik}(q) \;+\; \sum_{j=1}^{f} \dot q_j \, t_{ji}(q) \;-\; 0 \;\overset{t_{ji}(q)=t_{ij}(q)}{=}\; 2\sum_{k=1}^{f} \dot q_k \, t_{ik}(q) \end{aligned} \tag{17}$$

Damit bekommen wir

$$\sum_{i=1}^{f} p_i \, \dot q_i \;=\; \sum_{i=1}^{f} \left\{ 2 \sum_{k=1}^{f} \dot q_k \, t_{ik}(q) \right\} \dot q_i \tag{18}$$

$$\;=\; 2 \sum_{i,k=1}^{f} \dot q_i \dot q_k \, t_{ik}(q) \;=\; 2\,T \tag{19}$$

Also:

$$H \;=\; \sum_{i=1}^{f} p_i \, \dot q_i \;-\; L \;=\; 2T \;-\; (T - V) \;=\; T \;+\; V \tag{20}$$

und das Theorem ist bewiesen. ■