

Lösungen zum 6. Übungsblatt  
Dynamik der Teilchen und Felder

1. Aufgabe: a) Wir haben

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 - mgz \\ &= \frac{m}{2} \{ \dot{x}^2 + \dot{z}^2 \} - mgz \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} z &= f(x) \\ z_t &= f(x_t) \\ \dot{z}_t &= f'(x_t) \dot{x}_t \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} L(x, \dot{x}) &= \frac{m}{2} \{ \dot{x}^2 + \dot{z}^2 \} - mgz \\ &= \frac{m}{2} \{ \dot{x}^2 + f'(x)^2 \dot{x}^2 \} - mgf(x) \\ &= \frac{m}{2} \{ 1 + f'(x)^2 \} \dot{x}^2 - mgf(x) \end{aligned} \quad (1)$$

b) Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Nun ist

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \{ 1 + f'(x)^2 \} \dot{x} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m \{ 1 + f'(x)^2 \} \ddot{x} + m 2 f'(x) f''(x) \dot{x} \dot{x} \\ &= m \{ 1 + f'(x)^2 \} \ddot{x} + 2m f'(x) f''(x) \dot{x}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m f'(x) f''(x) \dot{x}^2 - mg f'(x)$$

Wenn wir das in (2) einsetzen, bekommen wir also

$$m \{ 1 + f'(x)^2 \} \ddot{x} + 2m f'(x) f''(x) \dot{x}^2 - \{ m f'(x) f''(x) \dot{x}^2 - mg f'(x) \} = 0$$

oder

$$\{1 + f'(x)^2\} \ddot{x} + f'(x) f''(x) \dot{x}^2 + g f'(x) = 0 \quad (5)$$

c) Mit Gleichung (3) bekommen wir

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} = m \{1 + f'(x)^2\} \dot{x}^2$$

und damit

$$\begin{aligned} H(x, \dot{x}) &:= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L(x, \dot{x}) \\ &= m \{1 + f'(x)^2\} \dot{x}^2 - \left\{ \frac{m}{2} \{1 + f'(x)^2\} \dot{x}^2 - mg f(x) \right\} \\ &= \frac{m}{2} \{1 + f'(x)^2\} \dot{x}^2 + mg f(x) \end{aligned} \quad (6)$$

Dies ist eine Konstante der Bewegung, wegen  $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 0)$  und

$$f(x_0) = f(0) = h$$

bekommen wir dann also

$$H(x_t, \dot{x}_t) = H(x_0, \dot{x}_0) = \frac{m}{2} \{1 + f'(0)^2\} 0^2 + mg f(0) = mgh$$

oder

$$\frac{m}{2} \{1 + f'(x_t)^2\} \dot{x}_t^2 + mg f(x_t) = mgh \quad (7)$$

Wir können das etwas umstellen und durch  $m$  teilen,

$$\{1 + f'(x_t)^2\} \dot{x}_t^2 = 2g[h - f(x)]$$

und bekommen

$$\dot{x} = \sqrt{2g} \sqrt{\frac{h - f(x)}{1 + f'(x)^2}}. \quad (8)$$

d) Wegen  $\dot{x} = dx/dt$  folgt aus Gleichung (8)

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2g} \sqrt{\frac{h - f(x)}{1 + f'(x)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{h - f(x)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1 + q'(x)^2}{q(x)}} dx$$

und damit erhalten wir für die Durchlaufzeit  $T$  mit  $x_0 = 0$  und  $x_T = \ell$ :

$$T = \int_0^T dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_T} \sqrt{\frac{1 + q'(x)^2}{q(x)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\ell \sqrt{\frac{1 + q'(x)^2}{q(x)}} dx. \quad (9)$$

**2.Aufgabe:** a) Mit

$$L(q, q') = \sqrt{\frac{1 + q'(x)^2}{q(x)}} \quad (10)$$

bekommen wir

$$\frac{\partial L}{\partial q'} = \frac{1}{\sqrt{q(x)}} \frac{2q'(x)}{2\sqrt{1+q'(x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{q(x)}} \frac{q'(x)}{\sqrt{1+q'(x)^2}}$$

und damit

$$\begin{aligned} H(q, q') &:= \frac{\partial L}{\partial q'} q' - L \\ &= \frac{1}{\sqrt{q(x)}} \frac{q'(x)^2}{\sqrt{1+q'(x)^2}} - \frac{1}{\sqrt{q(x)}} \sqrt{1+q'(x)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{q(x)}} \frac{q'(x)^2}{\sqrt{1+q'(x)^2}} - \frac{1}{\sqrt{q(x)}} \frac{1+q'(x)^2}{\sqrt{1+q'(x)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{q(x)}} \frac{-1}{\sqrt{1+q'(x)^2}} = \text{constant} \end{aligned} \quad (11)$$

b) Wir haben

$$\begin{aligned} z(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) &= c \dot{x}^2 \\ \Leftrightarrow z \left( 1 + \frac{\dot{z}^2}{\dot{x}^2} \right) &= c \\ \Leftrightarrow z \left( 1 + \left\{ \frac{dz/dt}{dx/dt} \right\}^2 \right) &= c \\ \Leftrightarrow z \left( 1 + \left\{ \frac{dz}{dx} \right\}^2 \right) &= c \\ \stackrel{z=q(x)}{\Leftrightarrow} q(x) \left( 1 + \{q'(x)\}^2 \right) &= c \\ \Leftrightarrow - \frac{1}{\sqrt{q(x)[1+q'(x)^2]}} &= - \frac{1}{\sqrt{c}} \end{aligned}$$

c) Mit

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{c}{2} [2t - \sin(2t)] \\ z_t &= \frac{c}{2} [1 - \cos(2t)] \end{aligned}$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= \frac{c}{2} [2 - 2\cos(2t)] = c [1 - \cos(2t)] \\ \dot{z}_t &= \frac{c}{2} [0 + 2\sin(2t)] = c \sin(2t) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{z}^2 &= c^2 \{1 - 2\cos(2t) + \cos^2(2t) + \sin^2(2t)\} \\ &= 2c^2 \{1 - \cos(2t)\} \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} z(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) &= \frac{c}{2} [1 - \cos(2t)] \times 2c^2 \{1 - \cos(2t)\} \\ &= c^3 [1 - \cos(2t)]^2 = c \dot{x}^2 \end{aligned}$$

Schauen wir uns die Randbedingungen

$$(x_0, z_0) \stackrel{!}{=} (0, 0) \quad (12)$$

$$(x_{t_{\text{end}}}, z_{t_{\text{end}}}) \stackrel{!}{=} (\ell, h) \quad (13)$$

an. Gleichung (12) ist offensichtlich automatisch erfüllt, für beliebiges  $c$  und  $t_{\text{end}}$ . Aus Gleichung (13) ergibt sich

$$x_{t_{\text{end}}} = \frac{c}{2} [2t_{\text{end}} - \sin(2t_{\text{end}})] \stackrel{!}{=} \ell \quad (14)$$

$$z_{t_{\text{end}}} = \frac{c}{2} [1 - \cos(2t_{\text{end}})] \stackrel{!}{=} h \quad (15)$$

Wir können etwa das  $c$  eliminieren, indem wir (15) durch (14) teilen,

$$\frac{z_t}{x_t} = \frac{1 - \cos(2t)}{2t - \sin(2t)} \stackrel{!}{=} \frac{h}{\ell} \quad (16)$$

Aus Gleichung (16) bekommen wir das  $t_{\text{end}}$  und aus (14) oder (15) dann das  $c$ .

**d)** Wir plotten die Hilfsfunktion, das ist der Ausdruck in (16),

$$g(t) := \frac{1 - \cos(2t)}{2t - \sin(2t)}$$

und tun dann einfach graphisch die Nullstelle (oder die Nullstellen..) von  $g(t) - h/\ell = g(t) - 1/5$  bestimmen, das ist dann das  $t_{\text{end}}$ . Siehe Excel-Sheet.

Tatsächlich findet man 3 verschiedene Lösungen für  $(c, t_{\text{end}})$ . Möglicherweise sind die anderen beiden Lösungen dann stationäre Punkte für das Funktional (9) von oben, also so ähnlich wie  $x = 0$  ein stationärer Punkt für die Funktion  $y(x) = x^3$  ist, die erste Ableitung ist 0, aber es ist kein Minimum. Ok, wir tun das hier nicht weiter analysieren. Alle 3 Lösungen sind auf dem Excelsheet geplottet.