Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2021/22

Lösungen zum 5. Übungsblatt
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: In dieser Aufgabe wollen wir das Lemma 2.4.3 aus dem `week5.pdf` beweisen. Die Aussage war folgende: Es sei A eine beliebige reelle oder komplexe $n \times n$ Matrix und Ω sei eine $n \times n$ Matrix mit

$$\Omega^2 \;=\; A \tag{1}$$

Weiter bezeichne Id die $n \times n$ Einheitsmatrix. Dann gilt

$$\exp\left\{ t \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right\} \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t)\,\Omega^{-1} \\ -\sin(\Omega t)\,\Omega & \cos(\Omega t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

wobei die $n \times n$ Matrizen $\cos(\Omega t)$ und $\sin(\Omega t)$ über die Potenzreihenentwicklungen der Sinus- und Cosinus-Funktion definiert sind.

Beweis: Wir haben

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$$

so dass

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k} \;=\; \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}^{k} \;=\; (-1)^k \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} \;=\; (-1)^k \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \;=\; (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & A^k \\ -A^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Mit $A = \Omega^2$ können wir schreiben

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k} \;=\; (-1)^k \begin{pmatrix} \Omega^{2k} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k} \end{pmatrix} \tag{3}$$

und

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} \;&=\; (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{2k} \\ -\Omega^{2k+2} & 0 \end{pmatrix} \\ &=\; (-1)^k \begin{pmatrix} \Omega^{2k+1} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1} \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

Damit bekommen wir also

$$\begin{aligned}
\exp\left\{ t \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} \\
&\overset{(3,4)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} \Omega^{2k} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k} \end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} \Omega^{2k+1} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1} \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & \cos(\Omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(\Omega t) & 0 \\ 0 & \sin(\Omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1} \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t)\,\Omega^{-1} \\ -\sin(\Omega t)\,\Omega & \cos(\Omega t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und das Lemma ist bewiesen. ■

2.Aufgabe: **a)** Für $m_1 = 0$ erhalten wir das System

$$\ell_1 \ddot{\varphi}_1 + \ell_2 \ddot{\varphi}_2 + g\,\varphi_1 = 0 \tag{5}$$
$$\ell_1 \ddot{\varphi}_1 + \ell_2 \ddot{\varphi}_2 + g\,\varphi_2 = 0 \tag{6}$$

Subtrahieren wir etwa (6) von (5) bekommen wir

$$g\,\varphi_1 - g\,\varphi_2 = 0$$

oder

$$\varphi_{1,t} = \varphi_{2,t} \tag{7}$$

für alle $t \geq 0$. Damit haben wir auch

$$\ddot{\varphi}_{1,t} = \ddot{\varphi}_{2,t}$$

und wenn wir das in (6) einsetzen, bekommen wir

$$(\ell_1 + \ell_2)\ddot{\varphi}_2 + g\,\varphi_2 = 0 \tag{8}$$

also ein harmonisches Fadenpendel mit Pendellänge $\ell_1 + \ell_2$ und Kreisfrequenz

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell_1 + \ell_2} \tag{9}$$

Die allgemeine Lösung haben wir bereits in der 2. Aufgabe von Übungsblatt 3 bestimmt, sie lautet

$$\varphi_2(t) = \varphi_{2,0} \cos(\omega_0 t) + \tfrac{\dot{\varphi}_{2,0}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \ . \tag{10}$$

b) Für den Fall

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 &= m \\ \ell_1 &= \ell_2 &= \ell \end{aligned}$$

bekommen wir das System

$$T \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_{1,t} \\ \ddot{\varphi}_{2,t} \end{pmatrix} + V \begin{pmatrix} \varphi_{1,t} \\ \varphi_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit den Matrizen

$$T = \begin{pmatrix} 2\,\ell & \ell \\ \ell & \ell \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$V = \begin{pmatrix} 2\,g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Es ist

$$T^{-1} = \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und für die Matrix A erhalten wir

$$A = T^{-1}V = \frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Eigenwerte:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 2 \overset{!}{=} 0$$

und wir bekommen

$$\lambda_\pm = 2 \pm \sqrt{4-2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Die Eigenvektoren sind gegeben durch

$$\vec{b}_+ = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} , \qquad \vec{b}_- = \begin{pmatrix} +1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und wir fassen sie wieder in der Matrix B zusammen,

$$B = \left(\vec{b}_+ \;\; \vec{b}_- \right) = \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Wir haben dann

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} B^{-1}$$

oder

$$A = \frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{g}{\ell} B \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} B^{-1} =: B \begin{pmatrix} \omega_+^2 & 0 \\ 0 & \omega_-^2 \end{pmatrix} B^{-1} \tag{14}$$

mit den Eigenfrequenzen

$$\omega_\pm \;:=\; \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}\,. \tag{15}$$

Das Ω bekommen wir wie in der Vorlesung,

$$\begin{aligned} A &= B \begin{pmatrix} \omega_+ & 0 \\ 0 & \omega_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_+ & 0 \\ 0 & \omega_- \end{pmatrix} B^{-1} \\ &= B \begin{pmatrix} \omega_+ & 0 \\ 0 & \omega_- \end{pmatrix} B^{-1} B \begin{pmatrix} \omega_+ & 0 \\ 0 & \omega_- \end{pmatrix} B^{-1} \\ &= \Omega^2 \end{aligned}$$

also

$$\Omega \;=\; B \begin{pmatrix} \omega_+ & 0 \\ 0 & \omega_- \end{pmatrix} B^{-1} \quad . \tag{16}$$

Die allgemeine Lösung hatten wir in `week5.pdf` angegeben, sie lautete

$$\begin{pmatrix} \varphi_{1,t} \\ \varphi_{2,t} \end{pmatrix} \;=\; \cos(\Omega t) \begin{pmatrix} \varphi_{1,0} \\ \varphi_{2,0} \end{pmatrix} \;+\; \sin(\Omega t)\, \Omega^{-1} \begin{pmatrix} \dot\varphi_{1,0} \\ \dot\varphi_{2,0} \end{pmatrix} \tag{17}$$

mit dem Matrizen

$$\cos(\Omega t) \;=\; B \begin{pmatrix} \cos(\omega_+ t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega_- t) \end{pmatrix} B^{-1} \tag{18}$$

$$\sin(\Omega t) \;=\; B \begin{pmatrix} \sin(\omega_+ t) & 0 \\ 0 & \sin(\omega_- t) \end{pmatrix} B^{-1} \tag{19}$$

Das B ist in Gleichung (13) explizit gegeben, wir geben noch das B^{-1} an:

$$B^{-1} \;=\; -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Die Matrix-Produkte berechnen wir dann in Teil (c).

c) Nach Voraussetzung ist $\dot\varphi_{1,0} = \dot\varphi_{2,0} = 0$, also ergibt sich aus der Gleichung (17)

$$\begin{pmatrix} \varphi_{1,t} \\ \varphi_{2,t} \end{pmatrix} \;=\; \cos(\Omega t) \begin{pmatrix} \varphi_{1,0} \\ \varphi_{2,0} \end{pmatrix} \;=\; \cos(\Omega t) \begin{pmatrix} \pi/36 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

mit der Matrix

$$\begin{aligned} \cos(\Omega t) &= B \begin{pmatrix} \cos(\omega_+ t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega_- t) \end{pmatrix} B^{-1} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega_+ t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega_- t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da wir das Resultat mit dem Vektor $(\pi/36, 0)$ multiplizieren müssen, brauchen wir nur die erste Spalte, also

$$\begin{aligned}
\cos(\Omega t) &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +\sqrt{2}\cos(\omega_+ t) & -\cos(\omega_+ t) \\ -\sqrt{2}\cos(\omega_- t) & -\cos(\omega_- t) \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}[\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)] & * \\ 2[\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)] & * \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir bekommen dann

$$\begin{pmatrix} \varphi_{1,t} \\ \varphi_{2,t} \end{pmatrix} = \cos(\Omega t) \begin{pmatrix} \pi/36 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\big[\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)\big] \\ 2\big[\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)\big] \end{pmatrix} \frac{\pi}{36}$$

oder

$$\varphi_{1,t} = \tfrac{\pi}{72} \big[\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)\big] \tag{22}$$

$$\varphi_{2,t} = -\sqrt{2}\,\tfrac{\pi}{72} \big[\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)\big] \tag{23}$$

mit den Frequenzen

$$\omega_\pm = 2\pi\,\nu_\pm = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,\sqrt{2 \pm \sqrt{2}} = \sqrt{9.81}\,\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}\ \mathrm{sec}^{-1}$$

und den folgenden numerischen Werten:

$$\begin{aligned}
\omega_+ &= 5.79\ \mathrm{s}^{-1} \\
\omega_- &= 2.40\ \mathrm{s}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_+ &= 0.92\ \mathrm{s}^{-1} \\
\nu_- &= 0.38\ \mathrm{s}^{-1}\ .
\end{aligned}$$

Die Lösungen (22) und (23) sind in dem Excel-Sheet `Loesung5-Aufg2c.xlsx` geplottet.