Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2021/22

Lösungen zum 4. Übungsblatt
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Wir betrachten die Bewegung eines kleinen Kügelchens der Masse m auf einem Kegel K unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F} = (0, 0, -mg)$. Der Kegel habe die Parametrisierung

$$K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \vec{x}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ c\,r \end{pmatrix}, \;\; (r, \varphi) \in [0, R] \times [0, 2\pi) \right\}$$

wobei c eine positive Konstante ist.

a) Wählen Sie (r, φ) als verallgemeinerte Koordinaten und geben Sie die Lagrange-Funktion an.

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen[1] für r und φ her.

a) Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L &= \text{kinetische Energie} - \text{potentielle Energie} \\ &= T - V \\ &= \tfrac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^2 - mg\,z \end{aligned} \tag{1}$$

Wir müssen L durch die verallgemeinerten Koordinaten r und φ ausdrücken. Das heisst also, wir müssen die Grössen $\dot{\vec{x}}^2$ und z durch die Koordinaten r und φ ausdrücken. Bei z geht das sehr schnell, das Kügelchen muss sich ja auf dem Kegel befinden, und auf dem Kegel ist ja

$$z = x_3(r, \varphi) = c\,r \tag{2}$$

Um $\dot{\vec{x}}^2$ zu berechnen, schreiben wir

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ c\,r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ c \end{pmatrix} =: r\,\vec{v}$$

mit

$$\vec{v} := \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ c \end{pmatrix}$$

[1] 'die Bewegungsgleichungen' meint dasselbe wie 'die Euler-Lagrange-Gleichungen'

Wir schreiben hier $\vec{v}$ und nicht $\vec{e}$, weil das $\vec{v}$ nicht normiert ist, es ist $\|\vec{v}\| = \sqrt{1+c^2}$ und nicht wie bei den $\vec{e}$'s $\|\vec{e}\| = 1$. Es gilt dann

$$\dot{\vec{v}} \;=\; \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi$$

mit

$$\vec{e}_\varphi \;:=\; \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich ist

$$\vec{v}\cdot\vec{e}_\varphi \;=\; -\cos\varphi\sin\varphi \,+\, \sin\varphi\cos\varphi \,+\, c\cdot 0 \;=\; 0$$

Wir bekommen dann

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \dot{r}\,\vec{v} + r\,\dot{\vec{v}} \\ &= \dot{r}\,\vec{v} + r\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}^2 &= \dot{r}^2\,\vec{v}^2 \,+\, 2\,r\dot{r}\,\dot{\varphi}\,\vec{v}\,\vec{e}_\varphi \,+\, r^2\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\varphi^{\,2} \\ &= \dot{r}^2\,(1+c^2) \,+\, 0 \,+\, r^2\,\dot{\varphi}^2\cdot 1 \\ &= \dot{r}^2\,(1+c^2) \,+\, r^2\,\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

Also erhalten wir für die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \tfrac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^2 \,-\, mg\,z \\ &= \tfrac{m}{2}\left\{\dot{r}^2\,(1+c^2) \,+\, r^2\,\dot{\varphi}^2\right\} \,-\, mg\,cr \end{aligned}$$

b) Die Lagrange-Funktion lautet nach Teil (a):

$$L \;=\; L(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi}) \;=\; \tfrac{m}{2}\left\{\dot{r}^2\,(1+c^2) \,+\, r^2\,\dot{\varphi}^2\right\} \,-\, mg\,cr \tag{3}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind gegeben durch

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \,-\, \frac{\partial L}{\partial r} \;=\; 0 \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \,-\, \frac{\partial L}{\partial \varphi} \;=\; 0 \tag{5}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\varphi}^2 \,-\, mgc \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}\,(1+c^2) \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= mr^2\dot{\varphi} \end{aligned}$$

Damit ist Gleichung (4) äquivalent zu

$$m\ddot{r}\,(1+c^2)\;-\;mr\dot{\varphi}^2\;+\;mgc \;=\; 0 \tag{6}$$

und Gleichung (5) ist äquivalent zu

$$\tfrac{d}{dt}\{mr^2\dot{\varphi}\} \;=\; m\{2r\dot{r}\dot{\varphi}\;+\;r^2\ddot{\varphi}\} \;=\; 0 \tag{7}$$

Wenn wir Gleichung (6) durch m und Gleichung (7) durch mr dividieren, erhalten wir damit das System

$$(1+c^2)\,\ddot{r}\;-\;r\,\dot{\varphi}^2\;+\;gc \;=\; 0 \tag{8}$$

$$2\,\dot{r}\,\dot{\varphi}\;+\;r\,\ddot{\varphi} \;=\; 0 \tag{9}$$

Das sind dann also die Bewegungsgleichungen des Systems. Dabei ist die Gleichung (7) vielleicht etwas informativer als die Gleichung (9), es folgt aus beiden Gleichungen

$$r^2\,\dot{\varphi} \;=\; \text{constant}\;, \tag{10}$$

das ist bei Gleichung (9) aber nicht mehr sofort offensichtlich.

2.Aufgabe: Die Rechnung befindet sich auf den ersten 4 Seiten von `week5.pdf`, die Lagrange-Funktion wird in Gleichung (1) auf Seite 3 angegeben und die Bewegungsgleichungen in den Gleichungen (2) und (3) auf Seite 4.