

Lösungen zum 10. Übungsblatt Dynamik der Teilchen und Felder

1. Aufgabe: Es sei

$$M_t := e^{tA} B e^{-tA}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_t &= \frac{d}{dt} \{ e^{tA} B e^{-tA} \} \\ &= A e^{tA} B e^{-tA} - e^{tA} B e^{-tA} A \\ &= A M_t - M_t A \\ &= [A, M_t] \\ &= L_A M_t \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} M_t = L_A M_t$$

wird aber gerade gelöst von

$$e^{tL_A} M_0 = e^{tL_A} B .$$

2. Aufgabe: Es sei

$$M_t := e^{tA} e^{tB} e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}$$

Wir zeigen, dass M_t die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} M_t = (A + B) M_t$$

erfüllt. Da die linke und die rechte Seite der zu beweisenden Formel für $t = 0$ offensichtlich identisch sind, folgt dann die Behauptung. Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_t &= A e^{tA} e^{tB} e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \\ &\quad + e^{tA} B e^{tB} e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \\ &\quad + e^{tA} e^{tB} (-t[A, B]) e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \end{aligned} \tag{1}$$

Da $[A, B]$ mit A und mit B kommutiert, kommutiert $[A, B]$ auch mit e^{tA} und mit e^{tB} . Den letzten Term in (1) können wir also auch so schreiben:

$$e^{tA} e^{tB} (-t[A, B]) e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} = -t[A, B] e^{tA} e^{tB} e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}$$

Den zweiten Term in (1) schreiben wir so:

$$e^{tA} B e^{tB} e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \stackrel{\text{Aufg.1}}{=} e^{tA} B e^{-tA} e^{tA} e^{tB} e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \\ \stackrel{\text{Aufg.1}}{=} e^{tL_A}(B) e^{tA} e^{tB} e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \quad (2)$$

Nun haben wir

$$e^{tL_A}(B) = \left\{ Id + L_A + \frac{1}{2}L_A^2 + \frac{1}{3!}L_A^3 + \dots \right\}(B)$$

und es gilt

$$L_A(B) = [A, B] \\ L_A^2(B) = L_A([A, B]) = [A, [A, B]] \stackrel{\text{nach Voraussetzung}}{=} 0$$

und damit

$$L_A^n(B) = 0 \quad \forall n \geq 2 .$$

Also,

$$e^{tL_A}(B) = B + t[A, B]$$

und den zweiten Term in (1) können wir auch so schreiben:

$$e^{tA} B e^{tB} e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} = e^{tL_A}(B) e^{tA} e^{tB} e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \\ = \{B + t[A, B]\} M_t$$

Wenn wir das in (1) einsetzen, bekommen wir

$$\frac{d}{dt} M_t = A M_t + \{B + t[A, B]\} M_t - t[A, B] M_t \\ = (A + B) M_t$$

und diese DGL wird gerade gelöst von

$$M_t = e^{t(A+B)} M_0 = e^{t(A+B)} .$$

3.Aufgabe: Wir haben

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

also

$$[A, B] = AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit bekommen wir

$$A[A, B] = B[A, B] = [A, B]A = [A, B]B = 0$$

und damit auch

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$$

also sind die Voraussetzungen von Aufgabe 2 erfüllt. Wir haben nun

$$A^2 = B^2 = 0$$

und damit

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Id + tA \\ e^{tB} &= Id + tB \\ e^{t(A+B)} &= Id + t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + AB + BA + B^2) \\ &\stackrel{BA=0}{=} Id + t(A+B) + \frac{t^2}{2}AB \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$[A, B]^2 = 0$$

und damit

$$e^{-\frac{t^2}{2}[A, B]} = Id - \frac{t^2}{2}[A, B]$$

Zu überprüfen ist die Formel

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB} e^{-\frac{t^2}{2}[A, B]} \quad (3)$$

Die linke Seite ist gegeben durch

$$e^{t(A+B)} = Id + t(A+B) + \frac{t^2}{2}AB = \begin{pmatrix} 0 & ta & \frac{t^2}{2}ab \\ 0 & 0 & tb \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

und die rechte Seite ist, wenn wir noch $BA = 0$ berücksichtigen,

$$\begin{aligned} &(Id + tA)(Id + tB)(Id - \frac{t^2}{2}[A, B]) \\ &= (Id + t(A+B) + t^2AB)(Id - \frac{t^2}{2}AB) \\ &= Id + t(A+B) + t^2AB - \frac{t^2}{2}AB \\ &= Id + t(A+B) + \frac{t^2}{2}AB \end{aligned}$$

und das ist identisch mit (4).

Ok, vielleicht könnte man sich auch noch ein interessanteres Beispiel überlegen..