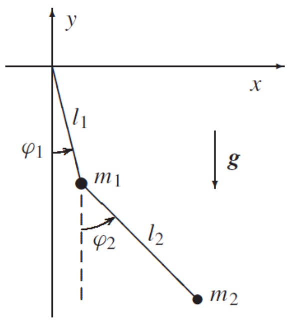
## VL5: Beispiele zu Kapitel 2.3: Die Euler-Lagrange Gleichungen für das Doppelpendel und Systeme von gekoppelten Oszillatoren

Wir wollen uns zunächst das Beispiel 2 aus der letzten Vorlesung etwas genauer anschauen, das war das Doppelpendel. Wir stellen die Lagrange-Funktion auf und können dann aus den Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen herleiten. Obwohl wir hier gerade mal 2 Teilchen haben, sind die Bewegungsgleichungen schon ziemlich kompliziert und lassen sich nicht mehr analytisch lösen. Mehr noch, für grosse Auslenkungen zeigt das Doppelpendel chaotisches Verhalten, also sehr sehr kleine Änderungen in den Anfangsbedingungen führen nach kurzer Zeit schon zu sehr unterschiedlichen Bahnverläufen.

Für kleine Auslenkungen mit kleinen Geschwindigkeiten lässt sich das System linearisieren und man erhält ein System von zwei gekoppelten Oszillatoren. Mathematisch, konzeptionell, unterscheidet sich ein System von zwei gekoppelten Oszillatoren kaum von einem System mit $n$ Oszillatoren, so dass wir also das Beispiel eines linearisierten Doppelpendels dann gleich als Motivation für die Diskussion eines Systems von $n$ gekoppelten Oszillatoren benutzen können.

**Das Doppelpendel:** Schauen wir uns also zunächst das Doppelpendel genauer an: Das ebene Doppelpendel unter dem Einfluss der Schwerkraft sieht so aus,




Wir haben also zwei Massen $m_1$ und $m_2$ im $\mathbb{R}^2$, mit kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \\ \vec{x}_2 &= (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

und den 2 Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 - \ell_1^2 &= 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - \ell_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

wobei also $\ell_1$ und $\ell_2$ jeweils die Pendellänge ist. Das Potential ist

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = m_1 g\, y_1 + m_2 g\, y_2$$

Als verallgemeinerte Koordinaten wählen wir die Winkel $\varphi_1$ und $\varphi_2$ wie in der Abbildung. Die Winkel werden also gegen die negative y-Achse gemessen, das ist also ein kleines bischen anders als bei den Standard-Polarkoordinaten, wo die Winkel ja gegen die positive x-Achse gemessen werden, aber das können wir ja so upsetten wie wir wollen. Wir bekämen dann also die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\sin\varphi_1 &= \tfrac{x_1}{\ell_1} \\
\cos\varphi_1 &= \tfrac{-y_1}{\ell_1} \\
\sin\varphi_2 &= \tfrac{x_2-x_1}{\ell_2} \\
\cos\varphi_2 &= \tfrac{-(y_2-y_1)}{\ell_2}
\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \ell_1 \sin\varphi_1 \\
y_1 &= -\ell_1 \cos\varphi_1 \\
x_2 - x_1 &= \ell_2 \sin\varphi_2 \\
y_2 - y_1 &= -\ell_2 \cos\varphi_2
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
x_2 &= \ell_2 \sin\varphi_2 + \ell_1 \sin\varphi_1 \\
y_2 &= -\ell_2 \cos\varphi_2 - \ell_1 \cos\varphi_1
\end{aligned}$$

Für die Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \ell_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 \\
\dot{y}_1 &= \ell_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 \\
\dot{x}_2 &= \ell_2\dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 + \ell_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 \\
\dot{y}_2 &= \ell_2\dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 + \ell_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1
\end{aligned}$$

Also erhalten wir für die kinetische Energie:

$$\begin{aligned}
T &= \tfrac{m_1}{2}\,\dot{\vec{x}}_1^{\,2} + \tfrac{m_2}{2}\,\dot{\vec{x}}_2^{\,2} \\
&= \tfrac{m_1}{2}\left\{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right\} + \tfrac{m_2}{2}\left\{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right\} \\
&= \tfrac{m_1}{2}\,\ell_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{m_2}{2}\left\{ \left[\ell_2\dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 + \ell_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1\right]^2 + \left[\ell_2\dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 + \ell_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1\right]^2 \right\} \\
&= \tfrac{m_1}{2}\,\ell_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{m_2}{2}\left\{ \ell_2^2\,\dot{\varphi}_2^2 + \ell_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 + 2\ell_2\dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2\,\ell_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 + 2\ell_2\dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2\,\ell_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 \right\} \\
&= \tfrac{m_1}{2}\,\ell_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{m_2}{2}\left\{ \ell_2^2\,\dot{\varphi}_2^2 + \ell_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 + 2\,\ell_1\ell_2\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2] \right\} \\
&= \tfrac{m_1}{2}\,\ell_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{m_2}{2}\left\{ \ell_2^2\,\dot{\varphi}_2^2 + \ell_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 + 2\,\ell_1\ell_2\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\;\cos(\varphi_1-\varphi_2) \right\} \\
&= \tfrac{m_1+m_2}{2}\,\ell_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{m_2}{2}\left\{ \ell_2^2\,\dot{\varphi}_2^2 + 2\,\ell_1\ell_2\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\;\cos(\varphi_1-\varphi_2) \right\}
\end{aligned}$$

Und für die potentielle Energie bekommen wir

$$\begin{aligned} V &= m_1 g\, y_1 \;+\; m_2 g\, y_2 \\ &= -m_1 g\, \ell_1 \cos\varphi_1 \;-\; m_2 g(\ell_2 \cos\varphi_2 \;+\; \ell_1 \cos\varphi_1) \\ &= -(m_1 + m_2) g\, \ell_1 \cos\varphi_1 \;-\; m_2 g\, \ell_2 \cos\varphi_2 \end{aligned}$$

Also ist die Lagrange-Funktion gegeben durch

$$\begin{aligned} L &= \text{kinetische Energie} \;-\; \text{potentielle Energie} \\ &= T \;-\; V \\ &= \tfrac{m_1+m_2}{2}\, \ell_1^2\, \dot\varphi_1^2 \;+\; \tfrac{m_2}{2}\, \ell_2^2\, \dot\varphi_2^2 \;+\; m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_1 \dot\varphi_2\, \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &\quad + (m_1 + m_2) g\, \ell_1 \cos\varphi_1 \;+\; m_2 g\, \ell_2 \cos\varphi_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Jetzt können wir die Euler-Lagrange-Gleichungen aufstellen: Wir haben

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= -\, m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_1 \dot\varphi_2\, \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \;-\; (m_1 + m_2) g\, \ell_1 \sin\varphi_1 \\ \tfrac{\partial L}{\partial \varphi_2} &= +\, m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_1 \dot\varphi_2\, \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \;-\; m_2 g\, \ell_2 \sin\varphi_2 \\ \tfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} &= (m_1 + m_2)\, \ell_1^2\, \dot\varphi_1 \;+\; m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_2\, \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \tfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2} &= m_2\, \ell_2^2\, \dot\varphi_2 \;+\; m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_1\, \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt} \tfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} &= (m_1 + m_2)\, \ell_1^2\, \ddot\varphi_1 \;+\; m_2\, \ell_1 \ell_2\, \ddot\varphi_2\, \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \;-\; m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_2\, (\dot\varphi_1 - \dot\varphi_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \tfrac{d}{dt} \tfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2} &= m_2\, \ell_2^2\, \ddot\varphi_2 \;+\; m_2\, \ell_1 \ell_2\, \ddot\varphi_1\, \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \;-\; m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_1\, (\dot\varphi_1 - \dot\varphi_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

Damit lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{d}{dt} \tfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} \;-\; \tfrac{\partial L}{\partial \varphi_1} \\ &= (m_1 + m_2)\, \ell_1^2\, \ddot\varphi_1 \;+\; m_2\, \ell_1 \ell_2\, \ddot\varphi_2\, \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \;-\; m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_2\, (\dot\varphi_1 - \dot\varphi_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &\quad + m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_1 \dot\varphi_2\, \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \;+\; (m_1 + m_2) g\, \ell_1 \sin\varphi_1 \\ &= (m_1 + m_2)\, \ell_1^2\, \ddot\varphi_1 \;+\; m_2\, \ell_1 \ell_2\, \ddot\varphi_2\, \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \;+\; m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &\quad + (m_1 + m_2) g\, \ell_1 \sin\varphi_1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2} \;-\; \tfrac{\partial L}{\partial \varphi_2} \\
&=\; m_2\,\ell_2^2\,\ddot\varphi_2 \;+\; m_2\,\ell_1\ell_2\,\ddot\varphi_1\;\cos(\varphi_1-\varphi_2) \;-\; m_2\,\ell_1\ell_2\,\dot\varphi_1\,(\dot\varphi_1-\dot\varphi_2)\,\sin(\varphi_1-\varphi_2) \\
&\qquad -\,m_2\,\ell_1\ell_2\,\dot\varphi_1\dot\varphi_2\;\sin(\varphi_1-\varphi_2) \;+\; m_2 g\,\ell_2\,\sin\varphi_2 \\
&=\; m_2\,\ell_2^2\,\ddot\varphi_2 \;+\; m_2\,\ell_1\ell_2\,\ddot\varphi_1\;\cos(\varphi_1-\varphi_2) \;-\; m_2\,\ell_1\ell_2\,\dot\varphi_1^2\,\sin(\varphi_1-\varphi_2) \;+\; m_2 g\,\ell_2\,\sin\varphi_2
\end{aligned}$$

Wir teilen beide Gleichungen durch $m_2$, teilen die erste Gleichung durch $\ell_1$ und die zweite Gleichung durch $\ell_2$, und bekommen:

$$\big(1+\tfrac{m_1}{m_2}\big)\,\ell_1\,\ddot\varphi_1 \;+\; \ell_2\,\ddot\varphi_2\;\cos(\varphi_1-\varphi_2) \;+\; \ell_2\,\dot\varphi_2^2\,\sin(\varphi_1-\varphi_2) \;+\; \big(1+\tfrac{m_1}{m_2}\big) g\,\sin\varphi_1 \;=\; 0 \tag{2}$$

$$\ell_2\,\ddot\varphi_2 \;+\; \ell_1\,\ddot\varphi_1\;\cos(\varphi_1-\varphi_2) \;-\; \ell_1\,\dot\varphi_1^2\,\sin(\varphi_1-\varphi_2) \;+\; g\,\sin\varphi_2 \;=\; 0 \tag{3}$$

**Kleine Auslenkungen und Geschwindigkeiten: Linearisiertes Doppelpendel**

Erinnern Sie sich an die Reihenentwicklungen

$$\sin x \;=\; x \;-\; \tfrac{x^3}{3!} \;+\; \tfrac{x^5}{5!} \;-\; \tfrac{x^7}{7!} \;\pm\;\cdots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\tfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{4}$$

$$\cos x \;=\; 1 \;-\; \tfrac{x^2}{2!} \;+\; \tfrac{x^4}{4!} \;-\; \tfrac{x^6}{6!} \;\pm\;\cdots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\tfrac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{5}$$

die wir nacher bei den $n$ gekoppelten Oszillatoren auch nochmal benutzen werden (dann ohne Approximationen). Für kleine $x \ll 1$ approximieren wir

$$\begin{aligned}
\sin x \;&\approx\; x \\
\cos x \;&\approx\; 1
\end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass die Winkelgeschwindigkeiten $\dot\varphi_1$ und $\dot\varphi_2$ ebenfalls klein sind, so dass wir die Terme $\dot\varphi_i^2\,\sin(\varphi_1-\varphi_2)$ als klein gegenüber den first order terms betrachten können. Sprich: Wir lassen die einfach weg. Aus (2) und (3) erhalten wir dann das System

$$\big(1+\tfrac{m_1}{m_2}\big)\,\ell_1\,\ddot\varphi_1 \;+\; \ell_2\,\ddot\varphi_2 \;+\; \big(1+\tfrac{m_1}{m_2}\big) g\,\varphi_1 \;=\; 0 \tag{6}$$

$$\ell_2\,\ddot\varphi_2 \;+\; \ell_1\,\ddot\varphi_1 \;+\; g\,\varphi_2 \;=\; 0 \tag{7}$$

oder

$$\begin{pmatrix} \big(1+\tfrac{m_1}{m_2}\big)\,\ell_1 & \ell_2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot\varphi_1\\ \ddot\varphi_2\end{pmatrix} \;+\; \begin{pmatrix} \big(1+\tfrac{m_1}{m_2}\big)\,g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{8}$$

Gleichung (8) ist ein Beispiel für ein System von 2 gekoppelten Oszillatoren. Dabei wollen wir ein System von $n$ gekoppelten Oszillatoren definieren als ein System, welches durch das folgende System von $n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden kann:

$$T\,\ddot{x} + V\,x = 0 \tag{9}$$

Dabei ist

$$x = x_t = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{10}$$

ein Vektor mit $n$ Funktionen von der Zeit, wobei $x_i(t)$ die Bewegung des $i$-ten Oszillators beschreibt. $T$ und $V$ sind $n \times n$ Matrizen,

$$T \in \mathbb{R}^{n\times n}\,, \quad V \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{11}$$

deren Einträge $T_{jk}$ und $V_{jk}$ nicht von der Zeit abhängen. Für das linearisierte Doppelpendel haben wir also $n = 2$,

$$x = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

und

$$T = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\ell_1 & \ell_2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$V = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \tag{14}$$

**Allgemeine Lösung für $n$ gekoppelte Oszillatoren:** Wir wollen die allgemeine Lösung von Gleichung (9) angeben. Dazu führen wir die Notation

$$v := \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{15}$$

ein. Offensichtlich ist dann

$$\dot{v} = \ddot{x} \tag{16}$$

und das System (9) können wir dann auch so schreiben:

$$T\,\dot{v} + V\,x = 0 \tag{17}$$

$$\dot{x} - v = 0 \tag{18}$$

Aus dem System 2. Ordnung mit $n$ Gleichungen haben wir also ein System 1. Ordnung (wir haben keine zweiten Ableitungen mehr, sondern nur noch erste Ableitungen, die zweiten

Ableitungen haben wir 'wegformalisiert') mit $2n$ Gleichungen gemacht, das ist ein Standard-Trick bei Differentialgleichungen.

Wir nehmen an, dass das $T$ invertierbar ist, und schreiben

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v && (19) \\ \dot{v} &= -T^{-1}V\,x \;=:\; -Ax && (20) \end{aligned}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \tag{21}$$

mit

$$A \;:=\; T^{-1}V \;\in\; \mathbb{R}^{n\times n} \tag{22}$$

Da nach Annahme die Matrix $A$ nicht von der Zeit $t$ abhängt, ist die allgemeine Lösung von (21) gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_t \\ v_t \end{pmatrix} = \exp\left\{ t \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Nun gilt das folgende

**Lemma 2.4.3:** Es sei $A$ eine beliebige reelle oder komplexe $n\times n$ Matrix und $\Omega$ sei eine $n\times n$ Matrix mit

$$\Omega^2 = A \tag{24}$$

Weiter bezeichne $Id$ die $n\times n$ Einheitsmatrix. Dann gilt

$$\exp\left\{ t \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t)\,\Omega^{-1} \\ -\sin(\Omega t)\,\Omega & \cos(\Omega t) \end{pmatrix} \tag{25}$$

wobei die $n\times n$ Matrizen $\cos(\Omega t)$ und $\sin(\Omega t)$ über die Potenzreihenentwicklungen der Sinus- und Cosinus-Funktion definiert sind.

**Beweis:** Machen wir in Aufgabe 1 vom Übungsblatt 5. ■

Damit können wir jetzt die allgemeine Lösung (23) für ein System von $n$ gekoppelten Oszillatoren auch folgendermassen schreiben, wir betrachten nur das $x_t$ (das $v_t$ ist ja einfach nur die Ableitung vom $x_t$):

$$x_t = \cos(\Omega t)\,x_0 + \sin(\Omega t)\,\Omega^{-1}\,v_0 \tag{26}$$

Wir erinnern uns kurz an die allgemeine Lösung des eindimensionalen harmonischen Oszillators, die wir auf dem 1. Übungsblatt berechnet hatten, sie war gegeben durch

$$x(t) = x_0\,\cos(\omega t) + \tfrac{\dot{x}_0}{\omega}\,\sin(\omega t) \tag{27}$$

und Gleichung (26) ist dann offensichtlich die natürliche Verallgemeinerung von (27) für den Fall mehrerer Oszillatoren.

**Zurück zum linearisierten Doppelpendel:**

Wir hatten

$$T \;=\; \begin{pmatrix} \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\ell_1 & \ell_2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{pmatrix}, \qquad V \;=\; \begin{pmatrix} \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$$

Wegen

$$T^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\ell_1 & \ell_2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{pmatrix}^{-1} \;=\; \frac{1}{\frac{m_1}{m_2}\ell_1\ell_2} \begin{pmatrix} \ell_2 & -\ell_2 \\ -\ell_1 & \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\ell_1 \end{pmatrix}$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} A \;=\; T^{-1}V \;&=\; \frac{1}{\frac{m_1}{m_2}\ell_1\ell_2} \begin{pmatrix} \ell_2 & -\ell_2 \\ -\ell_1 & \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\ell_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \\ &=\; \frac{1}{\frac{m_1}{m_2}\ell_1\ell_2} \begin{pmatrix} \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\ell_2\, g & -\ell_2\, g \\ -\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\ell_1\, g & \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\ell_1\, g \end{pmatrix} \\ &=\; \frac{g}{\frac{m_1}{m_2}\ell_1\ell_2} \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) \begin{pmatrix} \ell_2 & -\ell_2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} \\ -\ell_1 & \ell_1 \end{pmatrix} \\ &=\; \left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) \frac{g}{\ell_1\ell_2} \begin{pmatrix} \ell_2 & -c\,\ell_2 \\ -\ell_1 & \ell_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wobei wir

$$c \;:=\; \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} \;=\; \frac{m_2}{m_1+m_2} \tag{28}$$

gesetzt haben. Wir berechnen die Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} \ell_2-\lambda & -c\,\ell_2 \\ -\ell_1 & \ell_1-\lambda \end{pmatrix} \;&=\; (\ell_2-\lambda)(\ell_1-\lambda) \;-\; c\,\ell_1\ell_2 \\ &=\; \lambda^2 \;-\; (\ell_1+\ell_2)\lambda \;+\; (1-c)\ell_1\ell_2 \;\stackrel{!}{=}\; 0 \end{aligned} \tag{29}$$

Wir bekommen

$$\begin{aligned} \lambda_\pm \;&=\; \tfrac{\ell_1+\ell_2}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{\ell_1+\ell_2}{2}\right)^2 - \ell_1\ell_2 + c\,\ell_1\ell_2} \\ &=\; \tfrac{\ell_1+\ell_2}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{\ell_1-\ell_2}{2}\right)^2 + c\,\ell_1\ell_2} \end{aligned} \tag{30}$$

Beide Eigenwerte sind offensichtlich reell. Weiterhin ist $\lambda_+ > 0$, sieht man sofort, und wegen

$$\lambda_+\lambda_- \;=\; (1-c)\ell_1\ell_2 \;\stackrel{c<1}{>}\; 0 \tag{31}$$

das folgt aus (29), muss auch das $\lambda_-$ positiv sein, $\lambda_- > 0$ . Also sind beide Eigenwerte $\lambda_\pm$ positiv, $\lambda_\pm > 0$. Berücksichtigen wir noch den Vorfaktor in

$$A \;=\; \left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) \frac{g}{\ell_1\ell_2} \begin{pmatrix} \ell_2 & -c\,\ell_2 \\ -\ell_1 & \ell_1 \end{pmatrix}$$

dann erhalten wir die folgenden Eigenwerte für die Matrix $A$,

$$\omega_\pm^2 \;=\; \left(1+\tfrac{m_2}{m_1}\right)\tfrac{g}{\ell_1\ell_2}\,\left\{\;\tfrac{\ell_1+\ell_2}{2}\;\pm\;\sqrt{\left(\tfrac{\ell_1-\ell_2}{2}\right)^2+c\,\ell_1\ell_2}\;\right\} \tag{32}$$

Die Grössen $\omega_+$ und $\omega_-$ haben dann die Bedeutung von reellen Frequenzen, sie haben die Dimension 1/Zeit. Die Eigenvektoren können wir natürlich auch explizit berechnen, aber wir verzichten hier für den Moment darauf, wir wollen uns nur grob die Struktur der Lösung anschauen. Die $2\times 2$ Matrix der Eigenvektoren würde man vielleicht mit einem $V$ bezeichnen, aber das $V$ haben wir oben schon verbraucht, also nennen wir das vielleicht $B$, B wie Basis aus Eigenvektoren, also

$$B \;=\; \left(\,\vec b_+\;\vec b_-\,\right)\;\in\;\mathbb{R}^{2\times 2} \tag{33}$$

mit

$$A\,\vec b_\pm \;=\; \omega_\pm^2\,\vec b_\pm \tag{34}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} A &= B\begin{pmatrix}\omega_+^2 & 0\\ 0 & \omega_-^2\end{pmatrix}B^{-1}\\ &= B\begin{pmatrix}\omega_+ & 0\\ 0 & \omega_-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_+ & 0\\ 0 & \omega_-\end{pmatrix}B^{-1}\\ &= B\begin{pmatrix}\omega_+ & 0\\ 0 & \omega_-\end{pmatrix}B^{-1}B\begin{pmatrix}\omega_+ & 0\\ 0 & \omega_-\end{pmatrix}B^{-1}\\ &= \Omega^2 \end{aligned} \tag{35}$$

mit

$$\Omega \;:=\; B\begin{pmatrix}\omega_+ & 0\\ 0 & \omega_-\end{pmatrix}B^{-1} \tag{36}$$

Die Matrizen $\cos(\Omega t)$ und $\sin(\Omega t)$ aus der allgemeinen Lösung (26) lassen sich damit ebenfalls sofort berechnen. Wegen

$$\Omega^n \;=\; B\begin{pmatrix}\omega_+^n & 0\\ 0 & \omega_-^n\end{pmatrix}B^{-1} \tag{37}$$

bekommen wir (das gilt dann für beliebige Potenzreihen von $\Omega$)

$$\cos(\Omega t) \;=\; B\begin{pmatrix}\cos(\omega_+ t) & 0\\ 0 & \cos(\omega_- t)\end{pmatrix}B^{-1} \tag{38}$$

$$\sin(\Omega t) \;=\; B\begin{pmatrix}\sin(\omega_+ t) & 0\\ 0 & \sin(\omega_- t)\end{pmatrix}B^{-1} \tag{39}$$

Damit ist die allgemeine Lösung für das linearisierte Doppelpendel gegeben durch

$$\begin{pmatrix}\varphi_{1,t}\\ \varphi_{2,t}\end{pmatrix} \;=\; \cos(\Omega t)\,\begin{pmatrix}\varphi_{1,0}\\ \varphi_{2,0}\end{pmatrix}\;+\;\sin(\Omega t)\,\Omega^{-1}\,\begin{pmatrix}\dot\varphi_{1,0}\\ \dot\varphi_{2,0}\end{pmatrix} \tag{40}$$

Wir konkretisieren das dann noch ein bischen auf dem neuen Übungsblatt 5.