

VL4: Die Euler-Lagrange Gleichungen der klassischen Mechanik
Kapitel 2.3: Herleitung mit Zwangskräften, N Teilchen

Wir wollen jetzt die Überlegungen aus der 2. Vorlesung, aus dem `week2.pdf`, auf N -Teilchen Systeme übertragen. Wir beschreiben zunächst das allgemeine Setting und geben dann zwei Beispiele an, N geladene Kügelchen in einer Schüssel und das Doppelpendel, für die dieses Setting etwa gedacht wäre. Am Ende fassen wir die Ergebnisse in dem Theorem 2.3.2 zusammen.

Wir betrachten also N Teilchen mit Massen m_1, m_2, \dots, m_N und Ortsvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N \in \mathbb{R}^3$, die sich unter dem Einfluss eines Potentials

$$V = V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \quad (1)$$

bewegen. Durch das Potential V wird eine Kraft

$$\vec{F}_i = -\nabla_{\vec{x}_i} V \quad (2)$$

auf das i -te Teilchen ausgeübt.

Die Bewegung der N Teilchen sei nicht völlig frei, sondern sie unterliege mechanischen Restriktionen. Diese Zwangsbedingungen seien gegeben die durch die n (nicht redundanten, linear unabhängigen) Gleichungen

$$\begin{aligned} g_1(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) &= 0 \\ &\vdots \\ g_n(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Wenn wir die Ortsvektoren der N Teilchen in dem Vektor

$$\vec{x} := (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$$

zusammenfassen, dann findet die Bewegung also auf einer

$$f := 3N - n \quad (4)$$

dimensionalen Fläche \mathcal{F} oder Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{3N} statt, mit

$$\mathcal{F} := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid g_j(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = 0 \forall j = 1, \dots, n \} \subset \mathbb{R}^{3N} \quad (5)$$

Jede Parametrisierung von \mathcal{F} durch f unabhängige Koordinaten

$$q = (q_1, \dots, q_f) \quad (6)$$

definiert die verallgemeinerten Koordinaten für das gegebene mechanische Problem. Das heisst, die kartesischen Koordinaten $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$ sind so durch die q_1, \dots, q_f auszudrücken,

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \vec{x}_1(q_1, q_2, \dots, q_f) = \vec{x}_1(q) \\ &\vdots \\ \vec{x}_N &= \vec{x}_N(q_1, q_2, \dots, q_f) = \vec{x}_N(q)\end{aligned}\tag{7}$$

so dass die Zwangsbedingungen (3) automatisch erfüllt sind:

$$\begin{aligned}g_1(\vec{x}_1(q), \dots, \vec{x}_N(q)) &= 0 \\ &\vdots \\ g_n(\vec{x}_1(q), \dots, \vec{x}_N(q)) &= 0\end{aligned}\tag{8}$$

Das \mathcal{F} wird also durch die verallgemeinerten Koordinaten $q = (q_1, \dots, q_f)$ parametrisiert und die Vektoren

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_f}\tag{9}$$

sind linear unabhängige Tangentialvektoren an \mathcal{F} . Wir können diese Vektoren zu einer Basis von \mathbb{R}^{3N} erweitern, indem wir die $3N - f = 3N - (3N - n) = n$ Gradienten

$$\nabla_{\vec{x}} g_1, \quad \dots, \quad \nabla_{\vec{x}} g_n\tag{10}$$

mit hinzunehmen,

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_f}, \nabla_{\vec{x}} g_1, \dots, \nabla_{\vec{x}} g_n \right\}\tag{11}$$

ist eine Basis des \mathbb{R}^{3N} und die Gradienten stehen senkrecht auf den Tangentialvektoren, denn: wir leiten die k -te Gleichung von (8) nach q_j ab und erhalten

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial}{\partial q_j} g_k(\vec{x}_1(q), \dots, \vec{x}_N(q)) \\ &= \sum_{i=1}^N \nabla_{\vec{x}_i} g_k(\vec{x}_1(q), \dots, \vec{x}_N(q)) \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \\ &= \nabla_{\vec{x}} g_k \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j}\end{aligned}\tag{12}$$

In der zweiten Zeile von (12) haben wir eine Summe von Skalarprodukten im \mathbb{R}^3 , die letzte Zeile von (12) ist gegeben durch ein Skalarprodukt im \mathbb{R}^{3N} .

Bevor wir die Bewegungsgleichungen hinschreiben, wollen wir eben zwei Beispiele angeben, für die dieses Setting etwa gedacht ist.

Beispiel 1: N elektrostatisch geladene Kügelchen in einer halbkugelförmigen Schüssel unter dem Einfluss der Schwerkraft: In diesem Fall wäre das Potential gegeben durch

$$V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \sum_{i=1}^N mg z_i + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \frac{Q_i Q_j}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|}$$

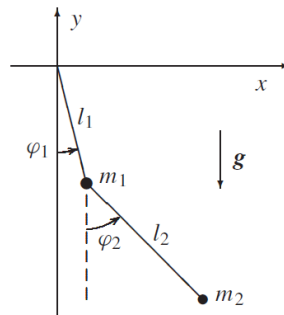
wenn die Q_1, \dots, Q_N die Ladungen der Kügelchen sind und etwa $\vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Wir haben $n = N$ Zwangsbedingungen, die durch die Gleichungen

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - R^2 = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

gegeben sind, wenn R der Schlüsselradius ist. Die Fläche \mathcal{F} wäre also $f = 3N - N = 2N$ dimensional und als Parametrisierung könnten wir einfach jeweils die Winkel der Kugelkoordinaten nehmen,

$$(q_1, q_2, \dots, q_{2N-1}, q_{2N}) = (\varphi_1, \theta_1, \dots, \varphi_N, \theta_N).$$

Beispiel 2: Das ebene Doppelpendel unter dem Einfluss der Schwerkraft: Das sieht also so aus,



Hier haben wir also ein ebenes Pendel, kein sphärisches im \mathbb{R}^3 wie letzte Woche, mit

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \\ \vec{x}_2 &= (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

mit den $n = 2$ Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 - \ell_1^2 &= 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - \ell_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

wobei also ℓ_1 und ℓ_2 jeweils die Pendellänge ist. Das Potential ist

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

Die Fläche \mathcal{F} ist $f = 2N - n = 4 - 2 = 2$ dimensional und als verallgemeinerte Koordinaten kämen die Winkel φ_1 und φ_2 aus der Abbildung in Frage.

Zurück zum allgemeinen Setting, Bewegungsgleichungen:

Wie sehen die Bewegungsgleichungen aus? Auf das N -Teilchen System wirken Kräfte, die durch das Potential V generiert werden, und Zwangskräfte:

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i$$

oder

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i + \nabla_{\vec{x}_i} V = \vec{Z}_i \quad (13)$$

Fassen wir die Zwangskräfte \vec{Z}_i zu einem Vektor im \mathbb{R}^{3N} zusammen,

$$\vec{Z} := (\vec{Z}_1, \dots, \vec{Z}_N) \quad (14)$$

dann darf das \vec{Z} keine tangentielle Komponente an \mathcal{F} haben. Also, wenn wir die Basis \mathcal{B} aus (11) benutzen,

$$\vec{Z} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla_{\vec{x}} g_k \quad (15)$$

mit gewissen Funktionen $\lambda_k = \lambda_k(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})$. Die Zwangskraft für das i -te Teilchen ist dann also gegeben durch

$$\vec{Z}_i = \sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla_{\vec{x}_i} g_k \quad (16)$$

und die Bewegungsgleichungen lauten

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i + \nabla_{\vec{x}_i} V = \sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla_{\vec{x}_i} g_k \quad (17)$$

Wir multiplizieren (17) mit $\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}$ und summieren über i

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^N \nabla_{\vec{x}_i} V \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \sum_{i=1}^N \nabla_{\vec{x}_i} g_k \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \underbrace{\nabla_{\vec{x}} g_k \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j}}_{=0} \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Wegen

$$\dot{\vec{x}}_i = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (19)$$

können wir die kinetische Energie T wieder (wie in **week2.pdf** mit den u, v, \dot{u}, \dot{v}) als eine Funktion der q_j und der \dot{q}_j auffassen,

$$\begin{aligned} T = T(q, \dot{q}) &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 \\ &\stackrel{(19)}{=} \sum_{j,k=1}^f \dot{q}_j \dot{q}_k \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \\ &= \sum_{j,k=1}^f \dot{q}_j \dot{q}_k t_{jk}(q) \end{aligned} \quad (20)$$

mit

$$t_{jk}(q) := \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \quad (21)$$

Dann gilt die folgende Aussage, die wir fast wortwörtlich aus dem Theorem 2.1.1 aus dem `week2.pdf` abschreiben können:

Theorem 2.3.1: Es sei $\vec{x} = \vec{x}(q)$ eine Parametrisierung von \mathcal{F} , $\vec{x}_t = \dot{\vec{x}}(q_t)$ und die Funktion $T = T(q, \dot{q})$ sei gegeben durch (20). Dann gilt

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \right) \left\{ \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 \right\} = m_i \ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \quad (22)$$

für alle $j = 1, 2, \dots, f$. Insbesondere gilt:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (23)$$

mit der kinetischen Energie

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 = \sum_{j,k=1}^f \dot{q}_j \dot{q}_k t_{jk}(q) \quad (24)$$

und $t_{jk}(q)$ wie in (21) angegeben.

Beweis: Gleichung (22) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \right) \frac{\dot{\vec{x}}_i^2}{2} &= \ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{\dot{\vec{x}}_i^2}{2} &= \ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\dot{\vec{x}}_i^2}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right\} &= \ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} + \dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_j} \\ \Leftrightarrow \ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{\vec{x}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \dot{q}_j} &= \ddot{\vec{x}}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} + \dot{\vec{x}}_i \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_j} \end{aligned}$$

also müssen wir noch zeigen:

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \quad (25)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_j} \quad (26)$$

Gleichung (25) folgt sofort aus

$$\dot{\vec{x}}_i = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (27)$$

und aus (27) folgt wiederum

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{k=1}^f \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \\
 &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 \ddot{x}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \\
 &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_k \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial q_j} \\
 (25) \quad &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}
 \end{aligned}$$

Damit ist Gleichung (26) und damit das Theorem bewiesen. ■

Mit Hilfe von Theorem 2.3.1 können wir also das System (18) schreiben als

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \quad (28)$$

oder

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_j} = 0 \quad (29)$$

Da nach Voraussetzung das V nur von den \vec{x}_i aber nicht von den \dot{x}_i abhängt, ist $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$ und wir können schliesslich schreiben

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_j} = 0 \quad (30)$$

Wir fassen unsere Ergebnisse wieder (analog zum Theorem 2.1.2 aus dem `week2.pdf`) in einem Theorem zusammen.

Theorem 2.3.2: Ein N -Teilchensystem bewege sich unter dem Einfluss eines Potentials $V = V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$. Durch das Potential werde die Kraft

$$\vec{F}_i = -\nabla_{\vec{x}_i} V(\vec{x})$$

auf das i -te Teilchen ausgeübt. Weiterhin unterliege das Teilchensystem mechanischen Beschränkungen, die dazu führen, dass die Bewegung nur in einer f -dimensionalen Fläche

$$\mathcal{F} = \left\{ \vec{x} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N} \mid g_j(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \right\} \subset \mathbb{R}^{3N}$$

stattfinden kann. Dann gilt:

a) Die Bahnkurven $\vec{x}_i(t) = \vec{x}_i(q_t)$ genügen den Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i + \nabla_{\vec{x}_i} V(\vec{x}) = \vec{Z}_i$$

mit den Zwangskräften

$$\vec{Z}_i = \sum_{k=1}^n \lambda_k(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}) \nabla_{\vec{x}_i} g_k(\vec{x})$$

Die Zwangskräfte \vec{Z}_i sind reale Kräfte, nicht nur ein mathematisches Hilfsmittel.

b) Definieren wir die Lagrange-Funktion L durch

$$L := T - V = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 - V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \quad (31)$$

dann können die Bahnkurven der verallgemeinerten Koordinaten $q_1(t), \dots, q_f(t)$ und damit auch die Bahnkurven in kartesischen Koordinaten $\vec{x}_i(t) = \vec{x}_i(q_1(t), \dots, q_f(t))$ aus den Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (32)$$

gewonnen werden.

Bemerkungen:

- 1) Zum Aufstellen und Lösen der Euler-Lagrange-Gleichungen (32), also zum Berechnen der Bahnkurven, ist die Kenntnis der Zwangskräfte \vec{Z}_i nicht erforderlich. Der relevante Teil von dem Theorem ist also typischerweise der Teil (b), der Teil (a) ist 'nur zur Info', nur zum besseren Verständnis sozusagen.
- 2) Die Parameter $q_t = (q_1(t), \dots, q_f(t))$ (oder jede Auswahl von solchen Parametern), die die Zwangsbedingungen

$$\vec{x} = \vec{x}(q_t) \in \mathcal{F}$$

sicherstellen, heißen **verallgemeinerte Koordinaten** für das gegebene mechanische Problem.

- 3) Das Theorem gilt auch für den Fall $\mathcal{F} = \mathbb{R}^{3N}$, also für den Fall, dass es überhaupt keine Zwangsbedingungen gibt. Es sagt dann aus, dass die Bewegungsgleichungen in beliebigen Koordinaten immer von der Form (32) sind. Während etwa $m\ddot{\vec{x}} = 0$ oder $m\ddot{x} = 0$ und $m\ddot{y} = 0$ nur in kartesischen Koordinaten so aussieht, in Polarkoordinaten gilt dann ja schon nicht mehr $m\ddot{r} = 0$ und $m\ddot{\varphi} = 0$, sondern die Gleichungen sind ein bisschen anders, ist die Form von (32) eben immer dieselbe, unabhängig davon, welche spezielle Parametrisierung gewählt wurde.