VL1: Kurze Erinnerung: Newtonsche Mechanik

Die Grundgleichung der Newtonschen Mechanik lautet:

$$\text{Kraft} \;=\; \text{Masse} \quad \text{mal} \quad \text{Beschleunigung}$$

oder in Buchstaben

$$\vec{F} \;=\; m\,\vec{a} \;=\; m\,\ddot{\vec{x}} \;=\; m\,\tfrac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

wenn $\vec{x}(t)$ die Weg-Zeit-Funktion ist. In vielen Situationen wird die Kraft durch ein Potenzial generiert. Das meint, die Kraft $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ lässt sich schreiben als

$$\vec{F} \;=\; -\nabla V(\vec{x}) \;=\; -\big(\tfrac{\partial V}{\partial x}\,,\,\tfrac{\partial V}{\partial y}\,,\,\tfrac{\partial V}{\partial z}\big)$$

Man sagt dann auch, das Kraftfeld $\vec{F}$ ist konservativ. Man hat dann also

$$m\,\ddot{\vec{x}} + \nabla V(\vec{x}) \;=\; 0$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\dot{\vec{x}}$:

$$m\,\ddot{\vec{x}}\,\dot{\vec{x}} + \nabla V(\vec{x})\,\dot{\vec{x}} \;=\; 0$$

Nun gilt nach der Kettenregel mit $\vec{x}(t) = (x_t, y_t, z_t)$

$$\tfrac{d}{dt}\,V\big(\vec{x}(t)\big) \;=\; \tfrac{\partial V}{\partial x}\,\tfrac{dx}{dt} + \tfrac{\partial V}{\partial y}\,\tfrac{dy}{dt} + \tfrac{\partial V}{\partial z}\,\tfrac{dz}{dt} \;=\; \nabla V \cdot \dot{\vec{x}}$$

Also können wir schreiben

$$\tfrac{m}{2}\,\tfrac{d}{dt}\,\dot{\vec{x}}^{\,2} + \tfrac{d}{dt}\,V(\vec{x}) \;=\; 0$$

oder

$$\tfrac{d}{dt}\Big\{\,\tfrac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^{\,2} + V(\vec{x})\,\Big\} \;=\; 0$$

Das bedeutet, dass die Gesamtenergie des Systems,

$$E \;:=\; \tfrac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^{\,2} + V(\vec{x})$$

eine zeitlich konstante Grösse sein muss. Neben der Gesamtenergie E kann es noch weitere Erhaltungsgrössen geben. Ist etwa das Potenzial durch ein Zentralpotenzial gegeben, d.h. das V lässt sich schreiben als

$$V \;=\; V(\|\vec{x}\|) \;=\; V(r)$$

dann ist der Drehimpuls $\vec{L}$ (wir schreiben $\vec{p}=m\dot{\vec{x}}$ für den linearen Impuls)

$$\vec{L} \;:=\; \vec{x}\times\vec{p} \;=\; \vec{x}\times(m\dot{\vec{x}}) \;=\; m\,\vec{x}\times\dot{\vec{x}}$$

eine Konstante der Bewegung, denn (das $\times$ meint das Vektorprodukt):

$$\tfrac{d\vec{L}}{dt} \;=\; m\,\underbrace{\dot{\vec{x}}\times\dot{\vec{x}}}_{=0} + m\,\vec{x}\times\ddot{\vec{x}} \;=\; \vec{x}\times\vec{F} \;=\; -\,\vec{x}\times\nabla V$$

und für ein Zentralpotenzial $V=V(r)$ hat man nun mit $r=\|\vec{x}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial V}{\partial x} &= V'(r)\,\tfrac{\partial r}{\partial x} \;=\; V'(r)\,\tfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \;=\; V'(r)\,\tfrac{x}{r}\\
\tfrac{\partial V}{\partial y} &= V'(r)\,\tfrac{y}{r}\\
\tfrac{\partial V}{\partial z} &= V'(r)\,\tfrac{z}{r}
\end{aligned}$$

oder vektoriell

$$\nabla V \;=\; \tfrac{V'(r)}{r}\,\vec{x}$$

und damit

$$\tfrac{d\vec{L}}{dt} \;=\; -\,\vec{x}\times\nabla V \;=\; -\,\tfrac{V'(r)}{r}\,\vec{x}\times\vec{x} \;=\; \vec{0}$$

Also ist das $\vec{L}$ eine Erhaltungsgrösse,

$$\vec{L} \;=\; \text{const}$$

für Kraftfelder, die von einem Zentralpotential $V=V(r)$ generiert werden.

Die wichtigsten Kraftfelder und Potentiale sind vielleicht die folgenden:

1) Das $1/r$ Potenzial oder auch Coulomb-Potenzial. Dadurch wird sowohl die elektrostatische Kraft zwischen zwei Punktladungen beschrieben als auch die Graviationskraft zwischen zwei Punktmassen. Befindet sich ein Punktteilchen mit Ladung Q am Koordinatenursprung $\vec{x}=\vec{0}$ und ein weiteres mit Ladung q am Ort $\vec{x}$, dann ist die Kraft $\vec{F}$, die die Ladung q durch die Ladung Q erfährt, gegeben durch (in MKSA-Einheiten)

$$\vec{F}(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{qQ}{r^2}\,\frac{\vec{x}}{r}$$

mit

$$\varepsilon_0 \;=\; 8.854\times10^{-12}\,\tfrac{\text{C}}{\text{Vm}}$$

Diese Kraft wird durch das Potenzial

$$V(r) \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{qQ}{r}$$

generiert.

Die Gravitationskraft wird ebenfalls durch ein $1/r$ Potenzial beschrieben. Befindet sich eine Punktmasse M am Koordinatenursprung $\vec{x} = \vec{0}$ und eine weitere Punktmasse m am Ort $\vec{x}$, dann ist die Kraft $\vec{F}$, die die Masse m durch die Punktmasse M erfährt, gegeben durch

$$\vec{F}(\vec{x}) \;=\; -\,G\,\frac{mM}{r^2}\,\frac{\vec{x}}{r}$$

mit der Gravitationskonstanten

$$G \;=\; 6.674 \times 10^{-11}\,\tfrac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

Diese Kraft wird durch das Potenzial

$$V(r) \;=\; -\,G\,\frac{mM}{r}$$

generiert.

2) Das harmonische Oszillator Potenzial

$$V(\vec{x}) \;=\; c\,\vec{x}^{\,2}$$

In einer Dimension wird dadurch etwa die Bewegung eines Feder-Schwere-Pendels beschrieben, wir haben die lineare Kraft

$$F \;=\; -\,D\,x$$

mit der Federkonstanten D, die von dem eindimensionalen Potenzial

$$V(x) \;=\; \tfrac{D}{2}\,x^2$$

generiert wird.

3) Auf Punktmassen m, die sich nur wenige Meter über der Erdoberfläche befinden, wirkt eine konstante, ortsunabhängige Schwerkraft der Form

$$\vec{F} \;=\; -mg\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

mit der Erdbeschleunigung

$$g \;\approx\; 9.81\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Diese wird durch ein lineares Potenzial

$$V(x,y,z) \;=\; mg\,z$$

generiert.

Da wir im weiteren Verlauf der Vorlesung in vielen Beispielen die Bewegung einer Punktmasse unter dem Einfluss der Schwerkraft betrachten werden, wollen wir an dieser Stelle noch die Schwerkraft aus der Gravitationskraft ableiten. Dazu lösen wir die folgende Übungsaufgabe.

Aufgabe: Wir wollen die Schwerkraft $F = mg$, mit $g = 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ die Erdbeschleunigung, aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz

$$\vec{F}_{21} \;=\; -Gm_1m_2\,\frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|^3} \tag{1}$$

herleiten. Dabei ist $\vec{F}_{21}$ die Kraft, die von der Punktmasse m_1 auf die Punktmasse m_2 ausgeübt wird und G ist die weiter oben angegebene Gravitationskonstante. Wir betrachten den Fall mit $m_1 = M =$ Erdmasse und $m_2 = m$ ist eine Probemasse, die etwa in einem Labor auf einem Tisch liegt. Wir können $m_1 = M$ nicht mehr als Punktmasse ansehen und schreiben deshalb

$$M \;=\; \textstyle\int_{\text{Erde}} dM(\vec{x}_1)$$

mit kleinen Massestückchen $dM(\vec{x}_1)$, die wir dann als punktförmig ansehen wollen. Nach Gleichung (1) übt dann so ein Massestückchen dM die Kraft

$$d\vec{F} \;=\; d\vec{F}_{21} \;=\; -G\,dm_1\,m_2\,\frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|^3} \;=\; -G\,dM(\vec{x}_1)\,m\,\frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{\|\vec{x} - \vec{x}_1\|^3}$$

auf die Probemasse $m = m_2$ aus, wenn sich das m an der Stelle $\vec{x} := \vec{x}_2$ befindet. Die Gesamtkraft, die auf m wirkt, ist dann also gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{x}) \;=\; \int_{\text{Erde}} d\vec{F} \;&=\; -\,Gm\int_{\text{Erde}} dM(\vec{x}_1)\,\frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{\|\vec{x} - \vec{x}_1\|^3} \\ &=\; -\,Gm\rho\int_{\text{Erde}} d^3x_1\,\frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{\|\vec{x} - \vec{x}_1\|^3} \end{aligned} \tag{2}$$

wenn $\rho = Masse/Volumen = dM/dV = dM/d^3x_1$ die Dichte der Erde bezeichnet, die wir als konstant ansehen wollen. Wir nehmen an, dass die Erde eine Kugel mit Radius

$$R \;=\; 6371\,\text{km}$$

ist, aus Symmetriegründen hängt die Kraft $\vec{F}$ in (2) dann nur von $r := \|\vec{x}\|$ ab, $\vec{F} = \vec{F}(r)$, wenn wir den Mittelpunkt von M in den Koordinatenursprung legen.

a) Es sei $F(r) = |\vec{F}(r)|$. Zeigen Sie: Für $r \geq R$ gilt

$$F(r) \;=\; Gm\rho\,\frac{4\pi}{3}R^3 \times \frac{1}{r^2} \;=\; Gm\,\frac{M}{r^2} \tag{3}$$

Im Fall $r \geq R$ kann man sich also doch die Erde als Punktmasse M im Koordinatenursprung $\vec{x}_1 = \vec{0}$ vorstellen, die Gleichung (1) liefert dann dasselbe Resultat.

b) Die Probemasse $m = m_2$ befinde sich jetzt in einer Höhe h über der Erdoberfläche, etwa $h = 1\text{m}$. Wir betrachten also den Fall $r = R + h$ mit $h \ll R$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} F(r) &\approx Gm\,\frac{M}{R^2}\,[1 - 2\frac{h}{R}] \\ &\approx Gm\,\frac{M}{R^2} \quad = \quad g\,m \end{aligned} \tag{4}$$

mit

$$g \;=\; G\,\frac{M}{R^2} \;\approx\; 9.82\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\;.$$

Die Erdmasse beträgt

$$M \;=\; 5.9722 \times 10^{24}\,\text{kg}\;.$$

Lösung: Nach Annahme haben wir

$$\text{Erde} \;=\; K_R(0) \;:=\; \left\{\,\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| \leq R\,\right\}$$

mit $K_R(0)$ die Kugel mit Radius R um den Ursprung. Wir müssen berechnen

$$\vec{F}(\vec{x}) \;=\; k \int_{K_R(0)} d^3x_1\,\frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{\|\vec{x} - \vec{x}_1\|^3} \tag{5}$$

mit der Konstanten

$$k \;:=\; -G\,m\,\rho_{\text{Erde}} \tag{6}$$

Es sei $D \in SO(3)$ eine beliebige Drehmatrix. Insbesondere gilt also

$$\begin{aligned} D^T &= D^{-1} \\ \det D &= 1 \end{aligned}$$

und $\|D\vec{y}\| = \|\vec{y}\|$ für alle $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} \vec{F}(D\vec{x}) \quad &= \quad k \int_{K_R(0)} d^3x_1\,\frac{D\vec{x} - \vec{x}_1}{\|D\vec{x} - \vec{x}_1\|^3} \\ &\overset{\vec{x}_1 = D\vec{y}}{=} \quad k \int_{K_R(0)} d^3(Dy)\,\frac{D\vec{x} - D\vec{y}}{\|D\vec{x} - D\vec{y}\|^3} \\ &\overset{\det D = 1}{=} \quad k \int_{K_R(0)} d^3y\,\frac{D\vec{x} - D\vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \\ &= \quad D\left\{\,k \int_{K_R(0)} d^3y\,\frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3}\,\right\} \;=\; D\,\vec{F}(\vec{x}) \end{aligned}$$

also

$$\vec{F}(D\vec{x}) \;=\; D\,\vec{F}(\vec{x}) \tag{7}$$

und damit auch

$$\|\vec{F}(D\vec{x})\| \;=\; \|D\,\vec{F}(\vec{x})\| \;=\; \|\vec{F}(\vec{x})\| \tag{8}$$

für jede Drehmatrix $D \in SO(3)$. Wir legen jetzt $\vec{x}$ auf die positive z-Achse,

$$\vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

mit $r = \|\vec{x}\|$. Für die Integration wählen wir Kugelkoordinaten,

$$\vec{y} \;=\; \rho \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \rho &\in [0, R] \\ \varphi &\in [0, 2\pi] \\ \theta &\in [0, \pi] \end{aligned}$$

und

$$d^3y \;=\; \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \;\; .$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 &= \rho^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta \,+\, \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta \,+\, (r - \rho\cos\theta)^2 \\ &= \rho^2 \sin^2\theta \,+\, (r - \rho\cos\theta)^2 \\ &= \rho^2 \sin^2\theta \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta \,+\, \rho^2\cos^2\theta \\ &= \rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta \end{aligned}$$

und wir müssen folgendes Integral berechnen:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{x}) &= k \int_{K_R(0)} d^3y \, \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \\ &= k \int_0^R d\rho\,\rho^2 \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \,\frac{1}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{3/2}} \begin{pmatrix} -\rho\cos\varphi\sin\theta \\ -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ r - \rho\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= k \int_0^R d\rho\,\rho^2 \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta \,\frac{1}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{3/2}} \begin{pmatrix} -\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi\sin\theta \\ -\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\sin\varphi\sin\theta \\ 2\pi(r - \rho\cos\theta) \end{pmatrix} \\ &= k \int_0^R d\rho\,\rho^2 \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta \,\frac{1}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi(r - \rho\cos\theta) \end{pmatrix} \;\;=:\;\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F(r) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$F(r) \;=\; 2\pi k \int_0^R d\rho\,\rho^2 \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\,\frac{r-\rho\cos\theta}{(\rho^2\,+\,r^2\,-\,2r\rho\cos\theta)^{3/2}} \tag{9}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{(\rho^2\,+\,r^2\,-\,2r\rho\cos\theta)^{1/2}}\right\} &= -\,\frac{1}{2}\,\frac{2r-2\rho\cos\theta}{(\rho^2\,+\,r^2\,-\,2r\rho\cos\theta)^{3/2}} \\
&= -\,\frac{r-\rho\cos\theta}{(\rho^2\,+\,r^2\,-\,2r\rho\cos\theta)^{3/2}}
\end{aligned}$$

können wir Gleichung (9) auch folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned}
F(r) &= -2\pi k \int_0^R d\rho\,\rho^2 \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\,\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{(\rho^2\,+\,r^2\,-\,2r\rho\cos\theta)^{1/2}}\right\} \\
&= -2\pi k\,\frac{d}{dr}\left\{\int_0^R d\rho\,\rho^2 \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\,\frac{1}{(\rho^2\,+\,r^2\,-\,2r\rho\cos\theta)^{1/2}}\right\} \\
&=: -2\pi k\,\frac{d}{dr}\,I(r)
\end{aligned} \tag{10}$$

mit dem Integral

$$\begin{aligned}
I(r) &= \int_0^R d\rho\,\rho^2 \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\,\frac{1}{(\rho^2\,+\,r^2\,-\,2r\rho\cos\theta)^{1/2}} \\
&\overset{u=\cos\theta}{=} -\int_0^R d\rho\,\rho^2 \int_1^{-1} du\,\frac{1}{(\rho^2\,+\,r^2\,-\,2r\rho\,u)^{1/2}} \\
&= +\int_0^R d\rho\,\rho^2 \int_{-1}^{1} du\,\frac{1}{(\rho^2\,+\,r^2\,-\,2r\rho\,u)^{1/2}} \\
&= \int_0^R d\rho\,\rho^2\,\frac{2}{-2r\rho}\,(\rho^2\,+\,r^2\,-\,2r\rho\,u)^{1/2}\Big|_{u=-1}^{u=1} \\
&= -\,\frac{1}{r}\int_0^R d\rho\,\rho\,(\rho^2\,+\,r^2\,-\,2r\rho\,u)^{1/2}\Big|_{u=-1}^{u=1} \\
&= -\,\frac{1}{r}\int_0^R d\rho\,\rho\,\left\{(\rho^2\,+\,r^2\,-\,2r\rho)^{1/2}\,-\,(\rho^2\,+\,r^2\,+\,2r\rho)^{1/2}\right\} \\
&= -\,\frac{1}{r}\int_0^R d\rho\,\rho\,\left\{\,|r-\rho|\,-\,|r+\rho|\,\right\} \\
&= +\,\frac{1}{r}\int_0^R d\rho\,\rho\,\left\{\,|r+\rho|\,-\,|r-\rho|\,\right\} \\
&\overset{\rho\le R\le r}{=} \frac{1}{r}\int_0^R d\rho\,\rho\,\left\{\,r+\rho\,-\,(r-\rho)\,\right\} \\
&= \frac{1}{r}\int_0^R d\rho\,2\rho^2 \;=\; \frac{1}{r}\,\frac{2R^3}{3}
\end{aligned} \tag{11}$$

Gleichung (11) eingesetzt in (10) liefert

$$\begin{aligned} F(r) &= -2\pi k \, \frac{d}{dr} \, I(r) \\ &= k \, \frac{1}{r^2} \, \frac{4\pi R^3}{3} \\ &\overset{(6)}{=} -Gm \, \rho_{\text{Erde}} \, \frac{1}{r^2} \, \frac{4\pi R^3}{3} \\ &= -Gm \, \frac{M}{r^2} \end{aligned} \tag{12}$$

Wir haben hier ein Minuszeichen, da wir das $F(r)$ nicht als den Betrag von $\vec{F}$ definiert hatten, sondern einfach als die z-Komponente von $\vec{F}$.

b) Mit $r = R + h$ und $h \ll R$ haben wir dann noch

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+h)^2} = \frac{1}{R^2} \, \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}$$

mit $\varepsilon := h/R$. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} &= (1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \pm \cdots)^2 \\ &= 1 \; - \; 2\varepsilon \; + \; O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

folgt dann die Behauptung.