

**Probe-Klausur zur Vorlesung
 Dynamik der Teilchen und Felder**

Nachname:							
Vorname:							
<small>Ich bestätige die nachfolgende Gesundheitserklärung:</small> Unterschrift:							
Matrikelnummer:						Note:	
Aufgabe:	1	2	3				Summe:
Punkte:	14	20	6				40
erreicht:							

Gesundheitserklärung: Hiermit erkläre ich, dass ich nach eigenem Empfinden gesund bin und insbesondere keine Symptome für einen Atemwegsinfekt oder eine COVID-19-Erkrankung aufweise (z.B. Husten, Halsschmerzen, Fieber, Durchfall, plötzlicher Verlust des Geruchs- oder Geschmackssinns).

Zugelassene Hilfsmittel: 1 beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt, eine Formelsammlung und ein einfacher Taschenrechner

Bevor Sie beginnen: Bitte geben Sie Ihre elektronischen Kommunikationsgeräte vorne ab. Wenn während der Klausur etwa ein Mobil-Telefon benutzt wird, muss die Klausur als **nicht bestanden** gewertet werden.

..bitte wenden

1.Aufgabe (14 Punkte): Wir betrachten die kräftefreie Bewegung eines Teilchens der Masse m in der (x, y) -Ebene und parametrisieren die Bewegung durch Polarkoordinaten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

- a) Wählen Sie r und φ als die verallgemeinerte Koordinaten und geben Sie die Lagrange-Funktion L an. Vereinfachen Sie Ihr Resultat soweit wie möglich.
- b) Leiten Sie die Euler-Lagrange Gleichungen für r und φ her und vereinfachen Sie sie soweit wie möglich.

2.Aufgabe (20 Punkte): Wir parametrisieren die Bewegung eines Teilchens der Masse m im \mathbb{R}^3 durch Kugelkoordinaten,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Die Lagrange-Funktion für die kräftefreie Bewegung mit $V = 0$ lautet dann

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 = \frac{m}{2} \left\{ \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \right\}$$

wenn wir $(q, \dot{q}) = (r, \varphi, \theta, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{\theta})$ als die verallgemeinerten Koordinaten wählen. Wir wollen jetzt die Bewegung in einem Zentralpotential (z.B. $V(r) = \text{const}/r$, Coulomb-Potential)

$$V = V(r)$$

betrachten.

- a) Geben Sie die Lagrange-Funktion an.
- b) Stellen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen auf.
- c) Berechnen Sie die verallgemeinerten Impulse $(p_r, p_\varphi, p_\theta)$.
- d) Berechnen Sie die Hamilton-Funktion $H = H(r, \varphi, \theta, p_r, p_\varphi, p_\theta)$.
- e) Stellen Sie die Hamiltonschen Gleichungen auf.

3.Aufgabe (6 Punkte): Eine Kugel mit der Masse $m = 1\text{kg}$ bewege sich unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ reibungsfrei auf einer schiefen Ebene, die mit einem Winkel von 45° gegen die (x, y) -Ebene geneigt ist. Die Kugel befinde sich zur Zeit $t = 0$ in Ruhe in einer Höhe von $z = 1$ Meter auf der schiefen Ebene und wird dann losgelassen. Wie lange dauert es, bis die Kugel eine Höhe von $z = 0$ erreicht hat?