

Ökonometrie VL2: Die t-, F- und die Chi-Quadrat Verteilung

Wir wollen uns zunächst an die t-, F- und die Chi-Quadrat Verteilung oder auch χ^2 -Verteilung erinnern. Die t- und die χ^2 -Verteilung werden wir im 4. Kapitel noch einmal benötigen. Darüber hinaus können wir diese Sachen als schönes Beispiel-Material verwenden, um uns mit der R-Software vertraut zu machen. Wir müssen uns zunächst an einige Dinge aus der Analysis II erinnern:

Erinnerung Analysis II: Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \|x\| \frac{x}{\|x\|} =: r x'$$

mit

$$x' \in S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x = \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} f(r x') d\Omega(x') r^{n-1} dr \quad (1)$$

wobei $d\Omega(x')$ das Oberflächenmass auf der $n-1$ dimensionalen Einheitssphäre ist. Die konkrete Form von $d\Omega(x')$ hängt davon ab, wie man S_{n-1} mit $n-1$ Parametern parametrisieren tut, das ist für uns im folgenden aber nicht relevant, da wir nur die folgende Gleichung (2) benötigen, den Spezialfall von (1) für rotationssymmetrische Funktionen:

Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, das heisst, wir können das f schreiben als

$$f(x) = \tilde{f}(r) = \tilde{f}(\|x\|)$$

mit einem $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann folgt aus Gleichung (1) die folgende Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x = \omega_n \int_0^\infty \tilde{f}(r) r^{n-1} dr \quad (2)$$

wobei

$$\omega_n := \int_{S_{n-1}} d\Omega(x')$$

die Oberfläche der n -dimensionalen Einheitskugel ist. Als warm-up Übung für die folgenden Rechnungen wollen wir zunächst in dem folgenden Lemma mit Hilfe von Gleichung (2) das Volumen τ_n und die Oberfläche ω_n der n -dimensionalen Einheitskugel berechnen:

Lemma 2.1: Es sei ('B' für 'ball')

$$B_n := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \}$$

die n -dimensionale Einheitskugel und τ_n sei das Volumen von B_n ,

$$\tau_n := \int_{B_n} d^n x$$

Dann gilt:

$$\omega_n = n \tau_n \tag{3}$$

und

$$\tau_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} \tag{4}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen nur für gerade n gilt.

Beweis: Mit Hilfe von Gleichung (2) können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \tau_n &= \int_{B_n} d^n x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi(\|x\| \leq 1) d^n x \\ &\stackrel{(2)}{=} \omega_n \int_0^1 \chi(r \leq 1) r^{n-1} dr \\ &= \omega_n \frac{r^n}{n} \Big|_0^1 \\ &= \frac{\omega_n}{n} \end{aligned}$$

also $n \tau_n = \omega_n$. Das ω_n können wir jetzt folgendermassen berechnen, wieder mit Hilfe von Gleichung (2): Zunächst mal gilt

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\phi^2}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi}} = 1,$$

die Fläche unter der Gauss'schen Glockenkurve ist 1. Wir können jetzt schreiben

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \times 1 \times \dots \times 1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\phi_1^2}{2}} \frac{d\phi_1}{\sqrt{2\pi}} \times \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\phi_2^2}{2}} \frac{d\phi_2}{\sqrt{2\pi}} \times \dots \times \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\phi_n^2}{2}} \frac{d\phi_n}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\phi_1^2 + \dots + \phi_n^2}{2}} \frac{d^n \phi}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \end{aligned}$$

Wir können Formel (2) anwenden und bekommen

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r^{n-1} dr \\ &= \frac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-y} (\sqrt{2y})^{n-2} dy \\ &= \frac{\omega_n 2^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-y} y^{\frac{n}{2}-1} dy \\ &= \frac{\omega_n}{2 \pi^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

Das können wir nach ω_n auflösen und erhalten

$$\omega_n = 2 \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} = n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} \Gamma(\frac{n}{2})} = n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Wir kommen jetzt zum Hauptresultat dieser Vorlesung, das ist der nächste Satz 2.2.

Satz 2.2: Es seien

$$\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$$

unabhängige, standard-normalverteilte Zufallszahlen. Dann gilt

a)

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \dots + \phi_n^2 \in \chi_n^2, \quad \text{ist } \chi_n^2 \text{ verteilt}$$

b)

$$\frac{\phi_0}{\sqrt{\frac{\phi_1^2 + \dots + \phi_n^2}{n}}} \in t_n, \quad \text{ist } t_n \text{ verteilt}$$

c)

$$\frac{\frac{\phi_1^2 + \dots + \phi_k^2}{k}}{\frac{\phi_{k+1}^2 + \dots + \phi_{k+\ell}^2}{\ell}} \in F_{k,\ell}, \quad \text{ist } F_{k,\ell} \text{ verteilt}$$

Das heisst genauer: Für eine beliebige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

a)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\phi_1^2 + \dots + \phi_n^2) \prod_{j=1}^n e^{-\frac{\phi_j^2}{2}} \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} = \int_0^\infty f(y) p_{\chi_n^2}(y) dy$$

b)

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f\left(\frac{\phi_0}{\sqrt{\frac{\phi_1^2 + \dots + \phi_n^2}{n}}}\right) \prod_{j=0}^n e^{-\frac{\phi_j^2}{2}} \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^\infty f(y) p_{t_n}(y) dy$$

c)

$$\int_{\mathbb{R}^{k+\ell}} f\left(\frac{\frac{\phi_1^2 + \dots + \phi_k^2}{k}}{\frac{\phi_{k+1}^2 + \dots + \phi_{k+\ell}^2}{\ell}}\right) \prod_{j=1}^{k+\ell} e^{-\frac{\phi_j^2}{2}} \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} = \int_0^\infty f(y) p_{F_{k,\ell}}(y) dy$$

mit den Dichten

a)

$$p_{\chi_n^2}(y) = c_n \times y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$$

mit der Konstanten

$$c_n = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}$$

b)

$$p_{t_n}(y) = c_n \times \frac{1}{\left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

mit der Konstanten

$$c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n} \Gamma(\frac{n}{2})}$$

c)

$$p_{F_{k,\ell}}(y) = c_{k,\ell} \times \frac{y^{\frac{k}{2}-1}}{\left(1 + \frac{k}{\ell} y\right)^{\frac{k+\ell}{2}}}$$

mit der Konstanten

$$c_{k,\ell} = \left(\frac{k}{\ell}\right)^{\frac{k}{2}} \frac{\Gamma(\frac{k+\ell}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})\Gamma(\frac{\ell}{2})}$$

Dabei sind k, ℓ und n natürliche Zahlen grösser oder gleich 1.

Beweis: Wir beweisen die Teile (a) und (b):

a) Mit Formel (2) bekommen wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(\phi_1^2 + \dots + \phi_n^2) \prod_{j=1}^n e^{-\frac{\phi_j^2}{2}} \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} &= \frac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty f(r^2) e^{-\frac{r^2}{2}} r^{n-1} dr \\ &= \frac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty f(y) e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} \frac{dy}{2} \end{aligned}$$

also ist

$$p_{\chi_n^2}(y) = c_n \times y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$$

mit

$$c_n = \frac{\omega_n}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma(\frac{n}{2})}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} .$$

b) Wir wenden wieder die Formel (2) an:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f\left(\frac{\phi_0}{\sqrt{\frac{\phi_1^2 + \dots + \phi_n^2}{n}}}\right) e^{-\frac{\phi_0^2}{2}} \frac{d\phi_0}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^n e^{-\frac{\phi_j^2}{2}} \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} = \\ & \frac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty f\left(\frac{\phi_0}{\frac{r}{\sqrt{n}}}\right) e^{-\frac{\phi_0^2}{2}} \frac{d\phi_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}} r^{n-1} dr \\ & = \frac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty f\left(\sqrt{n} \frac{\phi_0}{r}\right) e^{-\frac{\phi_0^2}{2}} \frac{d\phi_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}} r^{n-1} dr \end{aligned}$$

Wir eliminieren ϕ_0 durch die Substitution

$$\phi_0 = r y$$

und erhalten

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f\left(\frac{\phi_0}{\sqrt{\frac{\phi_1^2 + \dots + \phi_n^2}{n}}}\right) e^{-\frac{\phi_0^2}{2}} \frac{d\phi_0}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^n e^{-\frac{\phi_j^2}{2}} \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} = \\ & \frac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{n} y) e^{-\frac{r^2 y^2}{2}} r dy e^{-\frac{r^2}{2}} r^{n-1} dr \\ & = \frac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{n} y) \int_0^\infty e^{-\frac{r^2(y^2+1)}{2}} r^n dr dy \\ & = \frac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{n} y) \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{n+1}{2}}} dy \int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^n d\rho \\ & = \frac{\omega_n}{\sqrt{n} (2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{(1+\frac{y^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}} dy \int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^n d\rho \\ & = c_n \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{(1+\frac{y^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}} dy \end{aligned}$$

mit der Konstanten

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\omega_n}{\sqrt{n} (2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^n d\rho \\ &= \frac{\omega_n}{\sqrt{n} (2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty e^{-v} (\sqrt{2v})^{n-1} dv \\ &= \frac{\omega_n 2^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n} (2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty e^{-v} v^{\frac{n-1}{2}} dv \\ &= \frac{\omega_n}{2\sqrt{n} \pi^{\frac{n+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \\ &= \frac{n \pi^{\frac{n}{2}} / \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{2\sqrt{n} \pi^{\frac{n+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \\ &= \frac{n \pi^{\frac{n}{2}}}{2\sqrt{n} \pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \end{aligned}$$

Damit sind die Teile (a) und (b) bewiesen. ■