Kapitel 4: Brownsche Bewegung, Wiener-Maß und das Black-Scholes Modell: Das Ito-Lemma

Das ist jetzt keine grosse Sache mehr, die wesentliche Arbeit haben wir schon gemacht. Es sei $f = f(x)$ eine beliebige Funktion. Für das x wollen wir die Brownsche Bewegung x_t in das f einsetzen. Wir betrachten die Differenz $f(x_T) - f(x_0)$ für einen gegebenen Zeithorizont $T > 0$ und schreiben

$$f(x_T) - f(x_0) \;=\; \sum_{k=1}^{N} \{\, f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}}) \,\} \tag{1}$$

mit $t_k = k\Delta t$ und $N = T/\Delta t$ so dass $t_N = N\Delta t = T$ wie üblich. Da wir am Ende den Limes $\Delta t \to 0$ nehmen wollen, schreiben wir gleich dt anstatt Δt und dx_t anstatt Δx_t. Also etwa $t_k = k\,dt$ und $dx_{t_k} = x_{t_k} - x_{t_{k-1}} = \sqrt{dt}\,\phi_k$. Wir haben dann also:

$$x_{t_k} \;=\; x_{t_{k-1}} + dx_{t_k} \tag{2}$$

Mit dem Satz von Taylor können wir dann schreiben:

$$\begin{aligned} f(x_{t_k}) &= f\big(x_{t_{k-1}} + dx_{t_k}\big) \qquad (3)\\ &= f(x_{t_{k-1}}) + f'(x_{t_{k-1}})\,dx_{t_k} + \tfrac{1}{2} f''(x_{t_{k-1}})\,(dx_{t_k})^2 + \tfrac{1}{3!} f'''(x_{t_{k-1}})\,(dx_{t_k})^3 + \cdots \end{aligned}$$

Jetzt benutzen wir die Rechenregeln für die Brownsche Bewegung:

$$(dx_{t_k})^2 \;=\; dt$$

und

$$(dx_{t_k})^3 \;=\; (dx_{t_k})^2\,dx_{t_k} \;=\; dt\,dx_{t_k} \;=\; 0$$

Also bekommen wir im Limes $\Delta t \to 0$:

$$\begin{aligned} f(x_{t_k}) &= f(x_{t_{k-1}}) + f'(x_{t_{k-1}})\,dx_{t_k} + \tfrac{1}{2} f''(x_{t_{k-1}})\,dt + \tfrac{1}{3!} f'''(x_{t_{k-1}}) \times 0 \\ &= f(x_{t_{k-1}}) + f'(x_{t_{k-1}})\,dx_{t_k} + \tfrac{1}{2} f''(x_{t_{k-1}})\,dt \qquad (4) \end{aligned}$$

oder die folgende Formel, die auch als **Ito-Formel in differentieller Version** bezeichnet wird:

$$df(x_{t_k}) \;:=\; f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}}) \;=\; f'(x_{t_{k-1}})\,dx_{t_k} + \tfrac{1}{2} f''(x_{t_{k-1}})\,dt \tag{5}$$

Wenn wir (5) in (1) einsetzen, bekommen wir

$$\begin{aligned} f(x_T) - f(x_0) &= \sum_{k=1}^{N} \{ \, f(x_{t_k}) \; - \; f(x_{t_{k-1}}) \, \} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \{ \, f'(x_{t_{k-1}}) \, dx_{t_k} \; + \; \tfrac{1}{2} \, f''(x_{t_{k-1}}) \, dt \, \} \\ &\overset{\Delta t \to 0}{=} \int_0^T f'(x_t) \, dx_t \; + \; \tfrac{1}{2} \int_0^T f''(x_t) \, dt \end{aligned} \tag{6}$$

Das erste Integral in (6), wir ersetzten zum Zwecke der Definition den Integranden f' durch ein f,

$$\int_0^T f(x_t) \, dx_t \;\; := \;\; \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{N} f(x_{t_{k-1}}) \, dx_{t_k} \tag{7}$$

wird auch als ein stochastisches Ito-Integral bezeichnet. Neben solchen stochastischen Ito-Integralen gibt es auch stochastische Stratonovich-Integrale, diese sind folgendermassen definiert

$$\int_0^T f(x_t) \circ dx_t \;\; := \;\; \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{N} f\big(\tfrac{x_{t_{k-1}} + x_{t_k}}{2}\big) \, dx_{t_k} \tag{8}$$

Man tut also das f nicht am 'linken Randpunkt' $x_{t_{k-1}}$ evaluieren, sondern am 'Intervallmittelpunkt' $\frac{x_{t_{k-1}} + x_{t_k}}{2}$. Bei den üblichen deterministischen Riemann-Integralen wie man sie aus der Analysis kennt, spielt das natürlich keine Rolle und im Limes Rechteckbreite gegen Null kommt da immer dasselbe raus. Das liegt daran, dass $(dt)^2 = 0$ ist oder wenn die deterministische Integrationsvariable ein x ist, $(dx)^2 = 0$. Für eine Brownsche Bewegung ist nun aber $(dx_t)^2 \neq 0$ und das hat die folgende, auf den ersten Blick doch etwas gewöhnungsbedürftige Konsequenz:

Theorem 4.3: Für stochastische Ito- und Stratonovich-Integrale besteht der folgende Zusammenhang:

$$\int_0^T f(x_t) \circ dx_t \;\; = \;\; \int_0^T f(x_t) \, dx_t \; + \; \tfrac{1}{2} \int_0^T f'(x_t) \, dt \tag{9}$$

für eine beliebige Funktion $f = f(x)$.

Proof: Mit $dx_{t_k} = x_{t_k} - x_{t_{k-1}}$ haben wir

$$\tfrac{x_{t_{k-1}} + x_{t_k}}{2} \; = \; x_{t_{k-1}} \; + \; \tfrac{x_{t_k} - x_{t_{k-1}}}{2} \; = \; x_{t_{k-1}} \; + \; \tfrac{dx_{t_k}}{2}$$

und damit

$$\begin{aligned} f\big(\tfrac{x_{t_{k-1}} + x_{t_k}}{2}\big) \, dx_{t_k} &= f\big(x_{t_{k-1}} + \tfrac{dx_{t_k}}{2}\big) \, dx_{t_k} \\ &\overset{\text{Taylor}}{=} \Big\{ f(x_{t_{k-1}}) \; + \; f'(x_{t_{k-1}}) \tfrac{dx_{t_k}}{2} \; + \; \tfrac{1}{2} \, f''(x_{t_{k-1}}) \big(\tfrac{dx_{t_k}}{2}\big)^2 \Big\} \, dx_{t_k} \\ &\overset{(10)}{=} f(x_{t_{k-1}}) \, dx_{t_k} \; + \; f'(x_{t_{k-1}}) \tfrac{(dx_{t_k})^2}{2} \; + \; \tfrac{1}{2} \, f''(x_{t_{k-1}}) \tfrac{dt \, dx_{t_k}}{4} \\ &\overset{(10)}{=} f(x_{t_{k-1}}) \, dx_{t_k} \; + \; f'(x_{t_{k-1}}) \tfrac{dt}{2} \; + \; \tfrac{1}{2} \, f''(x_{t_{k-1}}) \; \times \; 0 \end{aligned}$$

wobei wir wieder die Rechenregeln

$$\begin{aligned} (dx_t)^2 &= dt \\ dx_t\,dt &= 0 \\ (dt)^2 &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

benutzt haben. Also,

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^T f(x_t) \circ dx_t &= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{N} f\big(\tfrac{x_{t_{k-1}} + x_{t_k}}{2}\big)\, dx_{t_k} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{N} \Big\{ f(x_{t_{k-1}})\, dx_{t_k} \;+\; f'(x_{t_{k-1}}) \tfrac{dt}{2} \Big\} \\ &= \textstyle\int_0^T f(x_t)\, dx_t \;+\; \frac{1}{2} \int_0^T f'(x_t)\, dt \end{aligned}$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

Aus (6) und (9) ergibt sich dann sofort das

Theorem 4.4: Es sei $f = f(x)$ eine beliebige, zweimal differenzierbare Funktion und $\{x_t\}_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Dann gilt:

$$f(x_T) - f(x_0) = \textstyle\int_0^T f'(x_t)\, dx_t \;+\; \frac{1}{2} \int_0^T f''(x_t)\, dt \tag{11}$$

$$= \textstyle\int_0^T f'(x_t) \circ dx_t \tag{12}$$

Dabei ist das erste Integral in (11) ein stochastisches Ito-Integral und das Integral in (12) ist ein stochastisches Stratonovich-Integral. Die Formel (11) wird auch als Ito-Formel oder als das **Ito-Lemma bezeichnet, in integraler Version**.