VL3: zu Kapitel 1: Diskrete und stetige Verzinsung, Handelsstrategien bei stetiger Verzinsung

Gestern hatten wir das elementare, aber sehr zentrale Theorem 1.1 bewiesen, das war die folgende Sache:

Wir betrachten eine Handelsstrategie mit N Handelszeitpunkten

$$t_0 \, , \; t_1 \, , \; t_2 \, , \; \cdot \, , \; t_{N-1} \, , \; t_N$$

Zum Zeitpunkt t_0 haben wir ein Startkapital V_0. Wir handeln mit einem Underlying S, etwa eine Aktie, welche am Ende vom Tag t_k den Preis $S_k = S(t_k)$ habe. Wir verfolgen folgende Handelsstrategie:

- Am Ende vom Tag t_0 kaufen wir δ_0 Aktien zum Preis S_0.
- Am Ende vom Tag t_1 verkaufen wir die δ_0 Aktien vom Vortag und kaufen δ_1 neue, beides zum Preis S_1.
- Allgemein: Am Ende vom Tag t_k verkaufen wir die δ_{k-1} Aktien vom Vortag und kaufen δ_k neue, beides zum Preis S_k. Am Ende vom Tag t_k halten wir also δ_k Aktien.
- Am Ende vom Tag t_N wird die Position geschlossen, wir verkaufen die δ_{N-1} Aktien vom Vortag, zum Preis S_N, und kaufen keine neuen mehr.

Dann gilt das folgende

Theorem 1.1: Wir verfolgen eine Handelsstrategie wie oben beschrieben.

a) Die Zinsen seien null. Dann gilt: Durch eine solche Handelsstrategie wird bei Zeit t_N der Betrag

$$V_N \;=\; V_0 \,+\, \sum_{k=1}^{N} \delta_{k-1}(S_k - S_{k-1})$$

generiert.

b) Die Zinsen r seien jetzt ungleich null. Wir nehmen an, dass ein Geldbetrag G in jeder Handelsperiode von t_{k-1} nach t_k gemäss

$$G \quad \overset{\text{die Zeit vergeht}}{\xrightarrow{\text{von } \mathrm{t_{k-1}} \text{ nach } \mathrm{t_k}}} \quad G(1+r)$$

verzinst wird. Dann gilt: Durch eine solche Handelsstrategie wird bei Zeit t_N der Betrag

$$V_N \;=\; (1+r)^N \, v_N$$

generiert, wobei v_N gegeben ist durch

$$v_N \;=\; v_0 \;+\; \sum_{k=1}^{N} \delta_{k-1}(s_k - s_{k-1})$$

mit den diskontierten Grössen

$$\begin{aligned} s_k &:= (1+r)^{-k}\, S_k \\ v_k &:= (1+r)^{-k}\, V_k \end{aligned}$$

Insbesondere ist also $v_0 = V_0$, das war das Startkapital.

In Teil (b) hatten wir angenommen, dass ein Geldbetrag G in jeder Handelsperiode von t_{k-1} nach t_k gemäss

$$G \quad \overset{\substack{\text{die Zeit vergeht} \\ \text{von } t_{k-1} \text{ nach } t_k}}{\longrightarrow} \quad G(1+r)$$

verzinst wird. In diesem Zusammenhang wollen wir uns kurz anschauen, wie Geldbeträge typischerweise verzinst werden können. Dazu machen wir die folgende Übungsaufgabe:

Aufgabe: Wir betrachten einen Zeithorizont von $T = 10$ Jahren und wir nehmen an, dass der jährliche Zinssatz bei $r = 5\%$ liegt. Ein Start-Kapital von 100 Euro soll verzinst werden. Wie gross ist das End-Kapital nach 10 Jahren bei

a) jährlicher

b) halbjährlicher

c) vierteljährlicher

d) monatlicher

e) stetiger

Verzinsung?

Lösung: Es sei also r der jährliche Zinssatz und $G = 100$ Euro ist das Startgeld. Bei jährlicher Verzinsung ergeben sich dann die folgenden Geldbeträge:

$$\begin{array}{rcl} 100 & \overset{\substack{\text{die Zeit vergeht} \\ \text{von 0 nach 1 Jahr}}}{\longrightarrow} & 100\,(1+5\%) \\[2ex] 100\,(1+5\%) & \overset{\substack{\text{die Zeit vergeht} \\ \text{von 1 Jahr nach 2 Jahren}}}{\longrightarrow} & 100\,(1+5\%)\,(1+5\%) \;=\; 100\,(1+5\%)^2 \\[2ex] 100\,(1+5\%)^2 & \overset{\substack{\text{die Zeit vergeht} \\ \text{vom 2. Jahr zum 3. Jahr}}}{\longrightarrow} & 100\,(1+5\%)^2\,(1+5\%) \;=\; 100\,(1+5\%)^3 \\ & \vdots & \\ 100\,(1+5\%)^9 & \overset{\substack{\text{die Zeit vergeht} \\ \text{vom 9. Jahr zum 10. Jahr}}}{\longrightarrow} & 100\,(1+5\%)^9\,(1+5\%) \;=\; 100\,(1+5\%)^{10} \;\approx\; 162.89 \end{array}$$

Betrachten wir jetzt halbjährliche Verzinsung. Wenn man sagt, dass man einen jährlichen Zinssatz von 5% hat und man halbjährlich verzinsen möchte, dann meint das, dass man immer nach einem halben Jahr einen Zins von 2.5% anwendet. Also bekommt man folgende Geldbeträge:

$$\begin{array}{rcll}
100 & \xrightarrow[\text{von 0 nach 0.5 Jahren}]{\text{die Zeit vergeht}} & 100\,(1+2.5\%) & \\
100\,(1+2.5\%) & \xrightarrow[\text{von 0.5 Jahren nach 1 Jahr}]{\text{die Zeit vergeht}} & 100\,(1+2.5\%)\,(1+2.5\%) & = \; 100\,(1+2.5\%)^2 \\
100\,(1+2.5\%)^2 & \xrightarrow[\text{von 1 Jahr nach 1.5 Jahren}]{\text{die Zeit vergeht}} & 100\,(1+2.5\%)^2\,(1+2.5\%) & = \; 100\,(1+2.5\%)^3 \\
 & \vdots & & \\
100\,(1+2.5\%)^{19} & \xrightarrow[\text{von 9.5 Jahren nach 10 Jahren}]{\text{die Zeit vergeht}} & 100\,(1+2.5\%)^{19}\,(1+2.5\%) & = \; 100\,(1+2.5\%)^{20} \\
 & & & \approx \; 163.86
\end{array}$$

Bei vierteljährlicher Verzinsung haben wir dann also 40 Zinsperioden, in denen dann jeweils der Zinssatz von

$$r/4 \;=\; 5\%/4 \;=\; 1.25\%$$

anzuwenden ist. Also bekommen wir den Betrag

$$100\,(1+1.25\%)^{40} \;\approx\; 164.36$$

Und bei monatlicher Verzinsung haben wir 12 Zinsperioden pro Jahr, 120 in 10 Jahren, in denen jeweils der Zinssatz von $r/12 = 5\%/12$ anzuwenden ist. Das liefert

$$100\left(1 + \tfrac{5\%}{12}\right)^{10\times 12} \;\approx\; 164.70$$

Bei n Zinsperioden pro Jahr ergibt sich also nach T Jahren ein Endbetrag G_T gegeben durch

$$G_T \;=\; G_0\left(1 + \tfrac{r}{n}\right)^{T\times n}$$

Stetige Verzinsung ist dann einfach der Limes $n \to \infty$ von der obigen Formel. Wir erinnern uns kurz an die Analysis I:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n \;=\; e^x$$

Also bekommen wir im Falle von stetiger Verzinsung:

$$\begin{aligned}
G_T &= \lim_{n\to\infty} G_0\left(1 + \tfrac{r}{n}\right)^{T\times n} \\
&= G_0\left\{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \tfrac{r}{n}\right)^n\right\}^T \\
&= G_0\, e^{rT}
\end{aligned}$$

In unserem konkreten Fall:

$$G_T \;=\; e^{0.05\times 10} \;=\; e^{0.5} \;\approx\; 164.87$$

In dieser Vorlesung werden wir im weiteren Verlauf immer mit stetiger Verzinsung rechnen. Das heisst also, wenn ein Geldbetrag für ein Zeitraum $t_k - t_{k-1}$ verzinst werden soll, dann ist ein Faktor von $e^{r(t_k - t_{k-1})}$ anzuwenden. Schreiben wir den Teil (b) des Theorems 1.1 noch einmal explizit für den Fall stetiger Verzinsung hin:

Theorem 1.1 (stetige Verzinsung): Wir verfolgen eine Handelsstrategie wie oben beschrieben. Die Zinsen r seien ungleich null und wir nehmen stetige Verzinsung an. Das heisst, ein Geldbetrag G wird in jeder Handelsperiode von t_{k-1} nach t_k gemäss

$$G \quad \overset{\substack{\text{die Zeit vergeht} \\ \text{von } \mathrm{t_{k-1}} \text{ nach } \mathrm{t_k}}}{\longrightarrow} \quad G\, e^{r(t_k - t_{k-1})}$$

verzinst. Dann gilt: Durch eine solche Handelsstrategie wird bei Zeit t_N der Betrag (es sei $t_0 := 0$)

$$V_N \;=\; e^{rt_N}\, v_N$$

generiert, wobei $v_N \;=\; e^{-rt_N} V_N$ gegeben ist durch

$$v_N \;=\; v_0 \;+\; \sum_{k=1}^{N} \delta_{k-1}(s_k - s_{k-1})$$

mit den diskontierten Grössen

$$\begin{aligned} s_k &:= e^{-rt_k}\, S_k \\ v_k &:= e^{-rt_k}\, V_k \end{aligned}$$

Insbesondere ist also $v_0 = V_0$, das war das Startkapital.

Im Skript auf der VL-homepage, in dem ‘Chapter 1: Trading Strategies’ können Sie sich auch nochmal einen Beweis dazu anschauen, der also gleich direkt mit stetiger Verzinsung arbeitet. Das ist da aber vielleicht doch etwas sehr formal dargestellt und man sieht die Struktur eigentlich nicht ganz so gut wie bei dem Beweis, den wir uns gestern in dem `week2a.pdf` angeschaut hatten.