

## VL2: Kapitel 1: Handelsstrategien

Letzte Woche haben wir an einigen Beispielen gesehen, dass man beliebige Optionsauszahlungen durch geeignete Handelsstrategien replizieren kann. Das ist die fundamentale Idee der Optionspreisbewertung. Für die weiteren Herleitungen und Berechnungen, sowohl in dieser Finanzmathematik I Vorlesung als auch für die Finanzmathematik II, brauchen wir also zunächst mal eine allgemeine Formel, die uns sagt, wenn wir heute etwa  $\delta_0$  Aktien kaufen, morgen  $\delta_1$  Aktien dazu kaufen oder wieder verkaufen usw., welcher Geldbetrag dann am Ende davon generiert worden ist. Dazu betrachten wir das folgende Setting:

Wir betrachten eine Handelsstrategie mit  $N$  Handelszeitpunkten

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}, t_N$$

Zum Zeitpunkt  $t_0$  haben wir ein Startkapital  $V_0$ . Wir handeln mit einem Underlying  $S$ , etwa eine Aktie, welche am Ende vom Tag  $t_k$  den Preis  $S_k = S(t_k)$  habe. Wir verfolgen folgende Handelsstrategie:

- Am Ende vom Tag  $t_0$  kaufen wir  $\delta_0$  Aktien zum Preis  $S_0$ .
- Am Ende vom Tag  $t_1$  verkaufen wir die  $\delta_0$  Aktien vom Vortag und kaufen  $\delta_1$  neue, beides zum Preis  $S_1$ .
- Allgemein: Am Ende vom Tag  $t_k$  verkaufen wir die  $\delta_{k-1}$  Aktien vom Vortag und kaufen  $\delta_k$  neue, beides zum Preis  $S_k$ . Am Ende vom Tag  $t_k$  halten wir also  $\delta_k$  Aktien.
- Am Ende vom Tag  $t_N$  wird die Position geschlossen, wir verkaufen die  $\delta_{N-1}$  Aktien vom Vortag, zum Preis  $S_N$ , und kaufen keine neuen mehr.

Dann gilt das folgende, mathematisch zwar sehr elementare (nur plus, minus, mal, geteilt..) aber konzeptionell sehr fundamentale (wir werden es sehr, sehr häufig brauchen, auch im continuous time limit im Black-Scholes Modell, und es kommt auch in der Klausur dran)

**Theorem 1.1:** Wir verfolgen eine Handelsstrategie wie gerade oben beschrieben.

a) Die Zinsen seien null. Dann gilt: Durch eine solche Handelsstrategie wird bei Zeit  $t_N$  der Betrag

$$V_N = V_0 + \sum_{k=1}^N \delta_{k-1} (S_k - S_{k-1})$$

generiert.

b) Die Zinsen  $r$  seien jetzt ungleich null. Wir nehmen an, dass ein Geldbetrag  $G$  in jeder Handelsperiode von  $t_{k-1}$  nach  $t_k$  gemäss

$$G \xrightarrow[\text{von } t_{k-1} \text{ nach } t_k]{\text{die Zeit vergeht}} G(1+r)$$

verzinst wird. Dann gilt: Durch eine solche Handelsstrategie wird bei Zeit  $t_N$  der Betrag

$$V_N = (1+r)^N v_N$$

generiert, wobei  $v_N$  gegeben ist durch

$$v_N = v_0 + \sum_{k=1}^N \delta_{k-1}(s_k - s_{k-1})$$

mit den diskontierten Grössen

$$\begin{aligned} s_k &:= (1+r)^{-k} S_k \\ v_k &:= (1+r)^{-k} V_k \end{aligned}$$

Insbesondere ist also  $v_0 = V_0$ , das war das Startkapital.

**Beweis:** Die Formel aus Teil a) ist ein Spezialfall der Formel aus Teil b) für den Fall Zinsen  $r = 0$ . Es reicht also, den Fall b) zu beweisen. Mit der Abkürzung

$$R := 1+r$$

können wir die Formel aus b) auch so schreiben:

$$\begin{aligned} v_N &= v_0 + \sum_{k=1}^N \delta_{k-1}(s_k - s_{k-1}) \\ R^{-N}V_N &= V_0 + \sum_{k=1}^N \delta_{k-1}(R^{-k}S_k - R^{-(k-1)}S_{k-1}) \\ V_N &= R^N V_0 + \sum_{k=1}^N \delta_{k-1}(R^{N-k}S_k - R^{N-(k-1)}S_{k-1}) \end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt durch Induktion: Für eine beliebige Zeit  $\ell \in \{0, 1, \dots, N\}$  ist der Portfoliowert  $V_\ell$  gegeben durch

$$V_\ell = R^\ell V_0 + \sum_{k=1}^{\ell} \delta_{k-1}(R^{\ell-k}S_k - R^{\ell-(k-1)}S_{k-1})$$

Für  $\ell = N$  folgt dann die Behauptung.

Induktionsanfang: Für  $\ell = 0$  haben wir

$$V_0 = R^0 V_0 + \sum_{k=1}^0 \dots = V_0$$

da die Summe keine Terme enthält. Das stimmt also.

Schluss von  $\ell$  auf  $\ell + 1$ : Die Formel stimme für  $\ell$ , am Ende von Tag  $\ell$  hat das Bank-Portfolio also den Wert

$$V_\ell = R^\ell V_0 + \sum_{k=1}^{\ell} \delta_{k-1} (R^{\ell-k} S_k - R^{\ell-(k-1)} S_{k-1})$$

Nach Definition der Handelsstrategie, müssen wir am Ende von Tag  $\ell$  eine Anzahl von  $\delta_\ell$  Stücken vom Underlying halten. Der Preis des Underlyings am Ende von Tag  $\ell$  ist  $S_\ell$  und wir müssen den Betrag  $\delta_\ell S_\ell$  bezahlen. Wir haben also am Ende von Tag  $\ell$

$$V_\ell = \underbrace{R^\ell V_0 + \sum_{k=1}^{\ell} \delta_{k-1} (R^{\ell-k} S_k - R^{\ell-(k-1)} S_{k-1}) - \delta_\ell S_\ell}_{\text{cash}} + \underbrace{\delta_\ell S_\ell}_{\text{Aktie}}$$

Die Zeit vergeht von Tag  $\ell$  nach Tag  $\ell + 1$ . Der Cash- oder Geld-Betrag wird gemäss  $G \rightarrow RG$  verzinst. Das Underlying oder die Aktie verändert ihren Wert gemäss  $S_\ell \rightarrow S_{\ell+1}$ . Der Wert des Bank-Portfolios am Ende von Tag  $\ell + 1$  beträgt also

$$\begin{aligned} V_{\ell+1} &= R \left\{ R^\ell V_0 + \sum_{k=1}^{\ell} \delta_{k-1} (R^{\ell-k} S_k - R^{\ell-(k-1)} S_{k-1}) - \delta_\ell S_\ell \right\} + \delta_\ell S_{\ell+1} \\ &= R^{\ell+1} V_0 + \sum_{k=1}^{\ell} \delta_{k-1} (R^{\ell+1-k} S_k - R^{\ell+1-(k-1)} S_{k-1}) - \delta_\ell R S_\ell + \delta_\ell S_{\ell+1} \\ &= R^{\ell+1} V_0 + \sum_{k=1}^{\ell} \delta_{k-1} (R^{\ell+1-k} S_k - R^{\ell+1-(k-1)} S_{k-1}) + \delta_\ell (S_{\ell+1} - R S_\ell) \\ &= R^{\ell+1} V_0 + \sum_{k=1}^{\ell+1} \delta_{k-1} (R^{\ell+1-k} S_k - R^{\ell+1-(k-1)} S_{k-1}) \end{aligned}$$

Damit ist die Formel auch für  $\ell + 1$  verifiziert und das Theorem ist bewiesen. ■