

## Kapitel 8: Stochastic Calculus und Payoff Replication im Black-Scholes Modell Übungen zur Ito-Formel

Wir wollen zunächst noch das Excelsheet von letzter Woche fertigmachen und ein Histogramm für die hedge-errors für die payoff replication simulation im Black-Scholes Modell generieren. Dann wollen wir uns in den folgenden Übungsaufgaben etwas mehr mit der Ito-Formel (oder den Ito-Formeln, wir hatten im `week12a.pdf` drei Versionen formuliert) vertraut machen.

**Übungsaufgabe:** Es sei  $\{S_t\}_{t \geq 0}$  gegeben durch das Black-Scholes Modell

$$dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dx_t$$

mit  $x_t$  eine Brownsche Bewegung und wir definieren

$$\tilde{S}_t := 1/S_t$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Ito-Formel, dass  $\tilde{S}_t$  ebenfalls wieder eine geometrische Brownsche Bewegung ist, d.h.  $\tilde{S}_t$  erfüllt die Gleichung

$$d\tilde{S}_t/\tilde{S}_t = a dt + b dx_t \tag{1}$$

mit geeigneten Konstanten  $a$  und  $b$ . Bestimmen Sie diese Konstanten  $a$  und  $b$  als Funktion von  $\mu$  und  $\sigma$ .

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Gleichung (1) und die Konstanten  $a$  und  $b$  herzuleiten.

- a) Zeigen Sie die Gleichung (1), indem Sie das Theorem 8.2 aus dem `week12a.pdf` benutzen. Was ist ihr  $F$  in diesem Fall?
- b) Zeigen Sie die Gleichung (1), indem Sie das Theorem 8.4 aus dem `week12a.pdf` benutzen, mit  $X_t = S_t$ . Was ist ihr  $F$  in diesem Fall?

**Lösung:** a) Die Lösung der SDE

$$dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dx_t$$

ist gegeben durch

$$S_t = S_0 e^{\sigma x_t + (\mu - \sigma^2/2)t}$$

Also haben wir

$$\tilde{S}_t = \frac{1}{S_t} = \frac{1}{S_0} e^{-\sigma x_t - (\mu - \sigma^2/2)t} = F(x_t, t)$$

mit der Funktion

$$F(x, t) := \frac{1}{S_0} e^{-\sigma x - (\mu - \sigma^2/2)t}$$

Wir bekommen die folgenden Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\sigma F$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sigma^2 F$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) F$$

Jetzt wenden wir die Ito-Formel aus dem Theorem 8.2 an,

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial x} dx_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dx_t)^2 + \frac{\partial F}{\partial t} dt \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} dx_t + \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial t} \right\} dt \\ &= -\sigma F dx_t + \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 F - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) F \right\} dt \end{aligned}$$

Oder jetzt wieder mit  $F = \tilde{S}$ ,

$$\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = -\sigma dx_t + (\sigma^2 - \mu) dt$$

Also,

$$a = \sigma^2 - \mu$$

$$b = -\sigma$$

b) Wir schreiben

$$\tilde{S}_t = \frac{1}{S_t} = F(S_t)$$

mit

$$F(X_t) := \frac{1}{X_t}$$

und

$$X_t := S_t$$

Das  $F$  hängt nicht explizit von der Zeit  $t$  ab, also wir brauchen kein zweites  $t$ -Argument, oder in terms of Theorem 8.4 ist

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Wir bekommen also

$$\begin{aligned}dF &= \frac{\partial F}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dX_t)^2 + \frac{\partial F}{\partial t} dt \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dX_t)^2\end{aligned}$$

mit  $F(x) = 1/x$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= -\frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= +\frac{2}{x^3}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}dX_t &= dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dx_t) \\ (dX_t)^2 &= (dS_t)^2 = S_t^2(\mu dt + \sigma dx_t)^2 = S_t^2 \sigma^2 dt\end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned}d\tilde{S}_t &= dF = \frac{\partial F}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dX_t)^2 \\ &= -\frac{1}{S_t^2} S_t(\mu dt + \sigma dx_t) + \frac{1}{2} \frac{2}{S_t^3} S_t^2 \sigma^2 dt \\ &= -\frac{1}{S_t} (\mu dt + \sigma dx_t) + \frac{1}{S_t} \sigma^2 dt \\ &= \tilde{S}_t \{ (\sigma^2 - \mu) dt - \sigma dx_t \}\end{aligned}$$

und damit

$$d\tilde{S}_t/\tilde{S}_t = a dt + b dx_t$$

mit

$$\begin{aligned}a &= \sigma^2 - \mu \\ b &= -\sigma.\end{aligned}$$

**Übungsaufgabe:** Es sei  $x_t$  eine Brownsche Bewegung. Beweisen Sie folgende Identitäten mit Hilfe der Ito-Formel:

a)  $\int_0^t x_s dx_s = \frac{x_t^2 - t}{2}$

b)  $\int_0^t x_s^2 dx_s = \frac{x_t^3}{3} - \int_0^t x_s ds$

c)  $\int_0^t s dx_s = t x_t - \int_0^t x_s ds$

**Lösung:** Wir benutzen die Ito-Formel aus Theorem 8.2:

$$f(x_T, T) - f(x_0, 0) = \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(x_t, t) dx_t + \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right\}(x_t, t) dt$$

oder, mit  $x_0 = 0$ ,

$$\int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(x_t, t) dx_t = f(x_T, T) - f(0, 0) - \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right\}(x_t, t) dt \quad (2)$$

a) We put  $f(x, t) = \frac{x^2}{2}$ . Then equation (2) becomes

$$\begin{aligned} \int_0^T x_t dx_t &= \frac{x_T^2}{2} - 0 - \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \times 1 + 0 \right\} dt \\ &= \frac{x_T^2}{2} - \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

b) We put  $f(x, t) = \frac{x^3}{3}$ . Then equation (2) becomes

$$\begin{aligned} \int_0^T x_t^2 dx_t &= \frac{x_T^3}{3} - 0 - \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \times 2x_t + 0 \right\} dt \\ &= \frac{x_T^3}{3} - \int_0^T x_t dt. \end{aligned}$$

c) We put  $f(x, t) = tx$ . Then equation (2) becomes

$$\begin{aligned} \int_0^T t dx_t &= T x_T - 0 - \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \times 0 + x_t \right\} dt \\ &= T x_T - \int_0^T x_t dt. \end{aligned}$$