

Kapitel 8: Stochastic Calculus und Payoff Replication im Black-Scholes Modell, Teil 2

Nach den Vorbereitungen von gestern können wir jetzt ohne grössere Umschweife das folgende konzeptionell sehr wichtige Theorem 8.5 formulieren, das also sagt, dass im Black-Scholes Modell immer noch jede (europäische, pfadunabhängige) Option durch eine geeignete Handelsstrategie repliziert werden kann:

Theorem 8.5: Let $H = H(S)$ be some option payoff and let $V = V(S, t)$ be a solution of the Black-Scholes PDE

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

$$V(S, T) = H(S)$$

and let $\{S_t\}_{t \geq 0}$ be a stochastic price process given by the Black-Scholes Modell with real world drift μ ,

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dx_t$$

Furthermore let $V_0 = V(S_0, 0)$ be the option price of H and define a trading strategy by the following delta's,

$$\delta_t = \delta(S_t, t) := \frac{\partial V(S_t, t)}{\partial S_t}$$

As usual, we use the notation with small letters

$$s_t := e^{-rt} S_t$$

for the discounted price process. Then the following equation holds:

$$e^{-rT} H(S_T) = V_0 + \int_0^T \delta_t ds_t$$

This equation means (recall part b of Theorem 1.1 in the first chapter) that in the Black-Scholes model any option payoff $H = H(S_T)$ can be replicated with a suitable trading strategy.

Proof: Let

$$v(S, t) := e^{-rt} V(S, t)$$

Then, since $v_0 = V_0$,

$$\begin{aligned} e^{-rT}H(S_T) - V_0 &= v(S_T, T) - v(S_0, 0) \\ &= \int_0^T dv \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} dv &= d(e^{-rt}V) \\ &= d(e^{-rt})V + e^{-rt}dV + d(e^{-rt})dV \\ &= -r e^{-rt} dt V + e^{-rt} dV + 0 \end{aligned}$$

Now,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS_t)^2 + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

Using

$$\delta_t = \frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t)$$

and, recalling the calculation rules for Brownian motion $(dx_t)^2 = dt$ and $dx_t dt = (dt)^2 = 0$,

$$\begin{aligned} (dS_t)^2 &= (\mu S_t dt + \sigma S_t dx_t)^2 \\ &= 0 + 0 + \sigma^2 S_t^2 (dx_t)^2 \\ &= \sigma^2 S_t^2 dt \end{aligned}$$

we obtain

$$dV = \delta_t dS_t + \left\{ \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right\} dt$$

We have to express dS_t through ds_t where $s_t = e^{-rt} S_t$. We have

$$\begin{aligned} ds_t &= d(e^{-rt} S_t) \\ &= -r e^{-rt} dt S_t + e^{-rt} dS_t \end{aligned}$$

or

$$e^{-rt} dS_t = ds_t + r e^{-rt} dt S_t$$

which gives

$$\begin{aligned} e^{-rt} dV &= \delta_t e^{-rt} dS_t + e^{-rt} \left\{ \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right\} dt \\ &= \delta_t [ds_t + r e^{-rt} dt S_t] + e^{-rt} \left\{ \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right\} dt \\ &= \delta_t ds_t + r S_t \frac{\partial V}{\partial S} dt + e^{-rt} \left\{ \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right\} dt \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned}
 dv &= -r e^{-rt} dt V + e^{-rt} dV \\
 &= -r e^{-rt} dt V + \delta_t ds_t + r S_t \frac{\partial V}{\partial S} dt + e^{-rt} \left\{ \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right\} dt \\
 &= \delta_t ds_t + e^{-rt} \left\{ \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV \right\} dt \\
 &= \delta_t ds_t
 \end{aligned}$$

where we used the Black-Scholes PDE in the last line. Thus,

$$\begin{aligned}
 e^{-rT} H(S_T) - V_0 &= v(S_T, T) - v(S_0, 0) \\
 &= \int_0^T dv \\
 &= \int_0^T \delta_t ds_t
 \end{aligned}$$

and the theorem is proven. ■

Excel/VBA-Simulation: Wir wollen jetzt die Aussage von Theorem 8.5 durch eine geeignete Excel/VBA-Simulation verifizieren. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass die Zinsen 0 sind, dann müssen wir also nicht zwischen diskontierten und undiskontierten Größen unterscheiden, wir haben $s_t = S_t$. Weiterhin wollen wir eine standard Call-Option mit payoff

$$H_{\text{call}} = \max\{S_T - K, 0\}$$

betrachten, für die wir sowohl für den Preis als auch für das Delta bereits eine analytische Formel hergeleitet haben, im Kapitel 6. Und zwar hatten wir

$$V_{\text{call},t} = S_t N(d_+) - K e^{-r(T-t)} N(d_-)$$

mit

$$d_{\pm} := \frac{\log \frac{S_t}{K} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

und die Formel für das Delta δ_t zur Zeit t war einfach

$$\delta_{\text{call}} = N(d_+)$$

Ok, machen wir jetzt die Implementation: Wir müssen die Größe

$$V(t_N) = V_0 + \sum_{k=1}^N \delta(t_{k-1}) \times (S_{t_k} - S_{t_{k-1}})$$

berechnen mit

$$\delta(t_j) = N[d_+(t_j)]$$

und

$$d_+(t_j) := \frac{\log \frac{S_{t_j}}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(t_N - t_j)}{\sigma \sqrt{t_N - t_j}}$$

und dann sollte in etwa gelten (exakt im Limes $\Delta t \rightarrow 0$)

$$V(t_N) \approx H(S_{t_N}) = \max\{S_{t_N} - K, 0\}$$

für beliebige Black-Scholes Pfade gegeben durch

$$S_{t_k} = S_{t_{k-1}} (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k)$$

Man beachten, dass diese Pfade einen beliebigen real world Drift μ haben können, da muss nicht der Zinssatz r stehen, den wir hier ja auf 0 setzen wollen. Das μ ist also ein weiterer Input-Parameter für die Excel-Simulation.