Kapitel 5: Das Black-Scholes Modell als zeitstetiger Grenzwert des Binomialmodells, Teil1

Wir kehren jetzt wieder zum Thema Optionspreisbewertung zurück und wollen uns überlegen, wie man den Preis einer Option berechnen kann, wenn das Underlying nicht mehr durch ein Binomialmodell modelliert wird, sondern durch das doch schon etwas realistischere Black-Scholes Modell. Funktioniert die Replikationslogik noch? Gibt es immer noch einen eindeutig definierten Startgeldbetrag V_0, so dass dann mit Hilfe einer geeigneten Handelsstrategie die Optionsauszahlung repliziert werden kann? Eine wesentliche Eigenschaft des Binomialmodells war ja gerade, dass es von einem Zeitschritt zum nächsten immer nur 2 Einstellungsmöglichkeiten gibt und genau das hat man ja jetzt im Black-Scholes Modell nicht mehr, weil man ja gerade das Modell etwas realistischer machen wollte. Also wie sieht das jetzt aus?

The Black-Scholes model is given by the price dynamics

$$\tfrac{dS}{S} \;=\; \mu\, dt + \sigma\, dx_t \tag{1}$$

with a constant drift $\mu \in \mathbb{R}$ (for example, $\mu = 5\%$), a constant volatility $\sigma > 0$ (for example, $\sigma = 20\%$) and x_t being a Brownian motion. In discrete time, this reads

$$\begin{aligned} \tfrac{\Delta S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}} \;=\; \tfrac{S_{t_k} - S_{t_{k-1}}}{S_{t_{k-1}}} &\;=\; \mu\,\Delta t + \sigma \Delta x_{t_k} \\ &\;=\; \mu\,\Delta t + \sigma(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) \\ &\;=\; \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \end{aligned} \tag{2}$$

with independent Gaussian $\mathcal{N}(0,1)$ random variables ϕ_k which have mean 0 and variance 1. An equivalent formulation is

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}}\big(1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\big) \tag{3}$$

Recall that the dynamics of the Binomial model is given by

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}} \times \begin{cases} (1 + \mathrm{ret_{up}}) & \text{with some probability } \; p \\ (1 + \mathrm{ret_{down}}) & \text{with probability } \; 1-p \end{cases} \tag{4}$$

The following choice looks quite natural:

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}}\big(1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\big) \tag{5}$$

where the $\varepsilon_k \in \{+1, -1\}$ are independent random variables with (real world) probabilities

$$\mathsf{P}(\varepsilon_k = +1) \;=\; \mathsf{P}(\varepsilon_k = -1) \;=\; \frac{1}{2} \tag{6}$$

such that, as for the ϕ_k, we have $\mathsf{E}[\varepsilon_k] = 0$ and $\mathsf{V}[\varepsilon_k] = 1$. Observe that in this context we are not considering any options or replicating strategies. Thus, interest rates do not enter the stage here and the notion of risk neutral probabilities is not relevant at this place. Expectation values, which one could call real world expectation values in this context, with respect to the Binomial model (5,6) are given by ($t = N\Delta t$, $N = t/\Delta t$)

$$\mathsf{E}^{\rm Bin}\big[\, f(S_t)\,\big] \;=\; \sum_{k=0}^{N} f\big(S_0(1+\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t})^k(1+\mu\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t})^{N-k}\big) \times \tfrac{1}{2^N}\tbinom{N}{k} \tag{7}$$

whereas expectation values with respect to the Black-Scholes model (1) are given by

$$\begin{aligned} \mathsf{E}^{\rm BS}\big[\, f(S_t)\,\big] \;&=\; \int f\big(S_0 e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma x_t}\big)\, dW(\{x_t\}_{0<t\leq T}) \\ &=\; \int_{\mathbb{R}} f\big(S_0 e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma x_t}\big)\, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x_t^2}{2t}}\, dx_t \end{aligned} \tag{8}$$

There is the following

Theorem 5.1: In the continuous time limit $\Delta t \to 0$, the Binomial model (5,6) converges to the Black-Scholes model (1), we have for any square integrable function f

$$\lim_{\Delta t\to 0} \mathsf{E}^{\rm Bin}\big[\, f(S_t)\,\big] \;=\; \mathsf{E}^{\rm BS}\big[\, f(S_t)\,\big] \tag{9}$$

For the proof, we need the following fact:

Lemma 5.1: Let t be a fixed time, $t = N\Delta t$, $N = t/\Delta t$ and let f be some square integrable function. Then:

$$\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ t \text{ fixed}}} \sum_{k=0}^{N} f\big[\sqrt{\Delta t}(2k-N)\big]\, \tfrac{1}{2^N}\tbinom{N}{k} \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx \tag{10}$$

Remark: An equivalent formulation of equation (10) is

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} f\Big(\,\sqrt{t}\; \tfrac{2k-N}{\sqrt{N}}\,\Big)\, \tfrac{1}{2^N}\tbinom{N}{k} \;=\; \int_{\mathbb{R}} f\big(\,\sqrt{t}\,x\,\big)\, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

or, with $\tilde f(x) := f(\sqrt{t}\,x)$,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \tilde f\big(\,\tfrac{2k-N}{\sqrt{N}}\,\big)\, \tfrac{1}{2^N}\tbinom{N}{k} \;=\; \int_{\mathbb{R}} \tilde f(x)\, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \tag{11}$$

Proof of Lemma 5.1: Der folgende Beweis ist ziemlich kompakt, aber auch etwas indirekt und es wird wesentlicher Gebrauch von der Fouriertransformation gemacht und der Eigenschaft, dass das eine unitäre Abbildung ist, ganz am Ende des Beweises. Da dieses Lemma das zentrale Hilfsmittel in diesem Kapitel ist, schauen wir uns auf dem neuen Übungsblatt noch einen direkten Beweis an, der ohne die Fouriertransformation auskommt. Hier jetzt also with Fourier transform, die folgendermassen definiert ist:

$$f(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ipx}\, \hat{f}(p)\, dp \tag{12}$$

Damit kann man dann schreiben

$$\sum_{k=0}^{N} f\big[\sqrt{\Delta t}(2k-N)\big]\, \tfrac{1}{2^N} \tbinom{N}{k} \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{N} \tfrac{1}{2^N} \tbinom{N}{k} e^{ip\sqrt{\Delta t}\,(2k-N)}\, \hat{f}(p)\, dp \tag{13}$$

The sum in (13) becomes

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} \tfrac{1}{2^N} \tbinom{N}{k} e^{ip\sqrt{\Delta t}\,(2k-N)} \quad &= \quad e^{-ip\sqrt{\Delta t}\,N}\, \tfrac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{N} \tbinom{N}{k}\; e^{2ip\sqrt{\Delta t}\,k} \\
&= \quad e^{-ip\sqrt{\Delta t}\,N}\, \tfrac{1}{2^N} \Big(1 + e^{2ip\sqrt{\Delta t}}\Big)^N \\
&= \quad \tfrac{1}{2^N} \Big(e^{-ip\sqrt{\Delta t}} + e^{ip\sqrt{\Delta t}}\Big)^N \\
&= \quad \Big\{\cos(p\sqrt{\Delta t})\Big\}^{\frac{t}{\Delta t}} \\
&= \quad \Big\{1 - \tfrac{p^2 \Delta t}{2} + O\big((\Delta t)^2\big)\Big\}^{\frac{t}{\Delta t}} \\
&\overset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \quad e^{-\frac{p^2}{2}t}
\end{aligned} \tag{14}$$

Thus, for $\Delta t \to 0$ (13) becomes

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{p^2}{2}t}\, \hat{f}(p)\, dp \quad &= \quad \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\tfrac{1}{t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\, f(x)\, dx \\
&= \quad \tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\, f(x)\, dx
\end{aligned} \tag{15}$$

where we used the fact that

$$\Big(e^{-\alpha \frac{x^2}{2}}\Big)^{\wedge}(p) = \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{p^2}{2}} \tag{16}$$

and that the Fourier transform is unitary, that is, $\int f\, g = \int \hat{f}\, \hat{g}$. ■

Proof of Theorem 5.1: We have $\log(1+x) = x - x^2/2 + O(x^3)$ and ignore terms $(\Delta t)^{\frac{3}{2}}$ in the calculation below or higher powers, since for those terms, after multiplication with $N = t/\Delta t$, at least a factor $\sqrt{\Delta t}$ survives which goes to zero in the continuous time limit $\Delta t \to 0$:

$$(1 + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t})^k (1 + \mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t})^{N-k} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
&= \; e^{k \log(1+\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}) \,+\, (N-k)\log(1+\mu\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t})} \\
&= \; e^{k(\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}-\frac{\sigma^2}{2}\Delta t) \,+\, (N-k)(\mu\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}-\frac{\sigma^2}{2}\Delta t) \,+\, O(\sqrt{\Delta t})} \\
&= \; e^{\sigma\sqrt{\Delta t}(2k-N)}\; e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t}\; e^{O(\sqrt{\Delta t})}
\end{aligned} \tag{18}$$

Thus (7) becomes, ignoring the last exponential $e^{O(\sqrt{\Delta t})}$ in (18),

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}^{\text{Bin}}\big[\, f(S_t)\,\big] \quad &= \quad \sum_{k=0}^{N} f\big(S_0(1+\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t})^k(1+\mu\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t})^{N-k}\big)\ \tfrac{1}{2^N}\tbinom{N}{k} \\
&= \quad \sum_{k=0}^{N} f\big(S_0 e^{\sigma\sqrt{\Delta t}(2k-N)} e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t}\big)\ \tfrac{1}{2^N}\tbinom{N}{k} \\
&\overset{\Delta t\to 0}{\to} \quad \int_{\mathbb{R}} f\big(S_0 e^{\sigma x} e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t}\big)\ \tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx
\end{aligned}
\tag{19}
$$

where we used Lemma 5.1 in the last line. ■

Morgen schauen wir uns dann an, wie wir diese Resultate benutzen können, um den Preis einer Option im Black-Scholes Modell zu berechnen.