# VL6: Kapitel 2.5: Herleitung der Euler-Lagrange Gleichungen aus einem Variationsprinzip

Wir betrachten eine Funktion $L : \mathbb{R}^{2f} \to \mathbb{R}$ ,

$$L \;=\; L\big(q_1(t), \cdots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \cdots, \dot{q}_f(t)\big) \;=\; L\big(\, q(t)\,,\, \dot{q}(t)\,\big) \tag{1}$$

und das Zeitintegral

$$I \;:=\; \int_0^T L\big(q(t), \dot{q}(t)\big)\, dt \;=:\; I(q) \tag{2}$$

Für $L$ haben wir hier natürlich die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems im Sinn, aber das folgende gilt für ein beliebiges $L$. Wir wollen diejenigen Bahnkurven

$$q(t) \;=\; \big(q_1(t), \cdots, q_f(t)\big)$$

bestimmen, für die das Zeitintegral $I(q)$ extremal wird. Dabei soll der Anfangs- und der Endpunkt von $q(t)$ fest vorgegeben sein,

$$\begin{aligned} q(0) \;&=\; q_0 \;\in\; \mathbb{R}^f \quad \text{fest}\,, \\ q(T) \;&=\; q_T \;\in\; \mathbb{R}^f \quad \text{fest}\,. \end{aligned}$$

Es sei

$$\eta(t) \;=\; \big(\eta_1(t), \cdots, \eta_f(t)\big) \;\in\; \mathbb{R}^f$$

eine beliebige Kurve mit

$$\eta(0) \;=\; \eta(T) \;=\; \vec{0}\,. \tag{3}$$

Wir betrachten dann die Kurven

$$q_\varepsilon(t) \;:=\; q(t) \,+\, \varepsilon\, \eta(t) \tag{4}$$

Offensichtlich gilt dann für diese Kurven

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(0) \;&=\; q(0) \,+\, \varepsilon\, \eta(0) \;=\; q_0 \\ q_\varepsilon(T) \;&=\; q(T) \,+\, \varepsilon\, \eta(T) \;=\; q_T \end{aligned}$$

für beliebige $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Wir können diese Bahnkurven in das $I(q)$ aus Gleichung (2) einsetzen und bekommen dann ein $I(q_\varepsilon)$. Wenn das $q(t)$ dann ein extremaler Pfad für das Zeitintegral (2) sein soll, muss die folgende notwendige Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{d}{d\varepsilon}_{|\varepsilon=0} I(q_\varepsilon) \;=\; \frac{d}{d\varepsilon}_{|\varepsilon=0} \int_0^T L\big(q(t)+\varepsilon\eta(t), \dot q(t)+\varepsilon\dot\eta(t)\big)\, dt \;\overset{!}{=}\; 0 \tag{5}$$

für alle Pfade $\eta$, die die Randbedingungen (3) erfüllen. Es gilt nun das folgende

**Theorem 2.5.1:** Der Pfad $q_t = (q_{1,t}, \cdots, q_{f,t})$ ist genau dann ein stationärer Pfad für das Zeitintegral $I = \int_0^T L(q_t, \dot q_t)\, dt$, wenn die $q_{j,t}$ die Euler-Lagrange Gleichungen erfüllen. Das heisst, es gilt die folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\varepsilon}_{|\varepsilon=0} \int_0^T L\big(q(t)+\varepsilon\eta(t), \dot q(t)+\varepsilon\dot\eta(t)\big)\, dt \;=\; 0 \qquad \forall\, \eta \text{ mit } \eta(0)=\eta(T)=0 \\ \Leftrightarrow \qquad & \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \;=\; 0 \quad \forall\, j=1,\cdots,f\,. \end{aligned} \tag{6}$$

**Beweis:** Wir nehmen an, dass wir das Integral mit der Ableitung vertauschen können, das ist der Standard-Fall, der typische Fall, und müssen dann also die Ableitung von $L$ nach dem $\varepsilon$ berechnen. Das geht dann mit der mehrdimensionalen Kettenregel,

$$\frac{d}{d\varepsilon} L\big(q(t)+\varepsilon\eta(t), \dot q(t)+\varepsilon\dot\eta(t)\big) \;=\; \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_j}\,\eta_j(t) \;+\; \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\,\dot\eta_j(t) \tag{7}$$

Das setzen wir jetzt in die Gleichung (5) ein:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\varepsilon} &= \int_0^T \Big\{ \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_j}\,\eta_j(t) \;+\; \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\,\dot\eta_j(t) \Big\} dt \\ &= \sum_{j=1}^f \int_0^T \frac{\partial L}{\partial q_j}\,\eta_j(t)\, dt \;+\; \sum_{j=1}^f \int_0^T \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\,\dot\eta_j(t)\, dt \end{aligned} \tag{8}$$

Für die Integrale in der zweiten Summe auf der rechten Seite von (8) können wir eine partielle Integration durchführen:

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\,\dot\eta_j(t)\, dt \;&\overset{\substack{\text{andere}\\ \text{Notation}}}{=}\; \int_0^T \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\big(q_\varepsilon(t), \dot q_\varepsilon(t)\big) \times \frac{d\eta_j}{dt}(t)\, dt \\ &\overset{\substack{\text{partielle}\\ \text{Integration}}}{=}\; \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\big(q_\varepsilon(t), \dot q_\varepsilon(t)\big) \times \eta_j(t)\, \Big|_{t=0}^{t=T} \\ &\qquad - \int_0^T \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\big(q_\varepsilon(t), \dot q_\varepsilon(t)\big) \times \eta_j(t)\, dt \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\big(q_\varepsilon(T), \dot q_\varepsilon(T)\big) \times \eta_j(T) \;-\; \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\big(q_\varepsilon(0), \dot q_\varepsilon(0)\big) \times \eta_j(0) \\ &\qquad - \int_0^T \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\big(q_\varepsilon(t), \dot q_\varepsilon(t)\big) \times \eta_j(t)\, dt \\ &\overset{(3)}{=}\; 0 \;-\; 0 \;-\; \int_0^T \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\big(q_\varepsilon(t), \dot q_\varepsilon(t)\big) \times \eta_j(t)\, dt \end{aligned} \tag{9}$$

Wir setzen Gleichung (9) in Gleichung (8) ein und bekommen

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\varepsilon} &= \sum_{j=1}^{f} \int_0^T \frac{\partial L}{\partial q_j}\, \eta_j(t)\; dt \;-\; \sum_{j=1}^{f} \int_0^T \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\big(q_\varepsilon(t), \dot q_\varepsilon(t)\big) \times \eta_j(t)\; dt \\ &= \sum_{j=1}^{f} \int_0^T \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} \right\}\big(q_\varepsilon(t), \dot q_\varepsilon(t)\big) \times \eta_j(t)\; dt \;\stackrel{!}{=}\; 0 \end{aligned}$$

Da die Funktionen $\eta_j(t)$ völlig willkürlich sein können, muss dann notwendigerweise gelten:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = 0 \qquad \forall\, j = 1, \cdots, f\,.$$

Damit ist das Theorem ist bewiesen. ■

Eines der Standard-Probleme, was in diesem Zusammenhang häufig in den Büchern diskutiert wird, ist das sogenannte Brachistochronen-Problem, das schauen wir uns auf dem neuen Übungsblatt an. Dabei wird für uns insbesondere die folgende Tatsache sehr hilfreich sein:

**Theorem 2.5.2:** Es sei $L = L(q, \dot q) : \mathbb{R}^{2f} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und die Bahnkurve $q_t = (q_{1,t}, \cdots, q_{f,t})$ erfülle die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad \forall\, j = 1, \cdots, f\,. \tag{10}$$

Dann gilt: Die Funktion

$$H(q, \dot q) \;:=\; \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\, \dot q_j \;-\; L(q, \dot q) \tag{11}$$

ist eine Erhaltungsgrösse, d.h. es gilt

$$\frac{d}{dt} H(q_t, \dot q_t) = 0\,. \tag{12}$$

**Beweis:** Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(q_t, \dot q_t) &= \frac{d}{dt}\left\{ \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\, \dot q_j \;-\; L(q, \dot q) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{f} \left[ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\, \dot q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\, \ddot q_j \right] - \frac{d}{dt} L(q, \dot q) \end{aligned} \tag{13}$$

Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen (10) bekommen wir

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \tag{14}$$

Das können wir in (13) einsetzen und erhalten

$$\frac{d}{dt} H(q_t, \dot{q}_t) \;=\; \sum_{j=1}^{f} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j}\, \dot{q}_j \;+\; \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\, \ddot{q}_j \right] \;-\; \frac{d}{dt} L(q, \dot{q}) \tag{15}$$

Die Zeitableitung der Lagrange-Funktion können wir mit der Kettenregel folgendermassen umschreiben:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(q, \dot{q}) &= \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} \;+\; \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \\ &= \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_j}\, \dot{q}_j \;+\; \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\, \ddot{q}_j \end{aligned} \tag{16}$$

und das ist offensichtlich identisch mit der Summe in (15), also haben wir

$$\frac{d}{dt} H(q_t, \dot{q}_t) \;=\; 0$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

**Definition 2.5.3:** Die Funktion $H$ aus Gleichung (11),

$$H(q, \dot{q}) \;=\; \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\, \dot{q}_j \;-\; L(q, \dot{q})$$

heisst die Hamilton-Funktion des mechanischen Systems.

**Bemerkung:** Die Aussage des Theorems 2.5.2 findet man auch häufig unter dem Begriff ‘Noether-Theorem’. Genauer ist es der Spezialfall für eine zeittranslationsinvariante Lagrange-Funktion oder für eine Lagrange-Funktion, die nicht explizit von der Zeit abhängt. Das heisst, man hat $L = L(q, \dot{q})$ , aber nicht $L = L(q, \dot{q}, t)$ .