

## 9. Übungsblatt zur Vorlesung Ökonometrie

**Aufgabe 1:** Wir betrachten noch einmal das Setting von Aufgabe 1 vom Übungsblatt 7: Zufallszahlen  $x_1, x_2, \dots$  heissen exponential-verteilt mit Parameter  $\lambda > 0$ , wenn für alle  $x \geq 0$

$$\text{Prob}[x_i \in [x, x + dx)] = \lambda e^{-\lambda x} dx$$

gilt und die Wahrscheinlichkeit für negative Zahlen 0 ist, also  $\text{Prob}[x_i \in [x, x + dx)] = 0$  falls  $x < 0$ . In Teil (c) hatten wir gezeigt, dass der Maximum Likelihood Schätzer für das  $\lambda$  durch

$$\hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}$$

gegeben ist, und in Teil (e) hatten wir den Erwartungswert berechnet,

$$\mathbb{E}[\hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n)] = \frac{n}{n-1} \lambda \quad (1)$$

a) Zeigen Sie jetzt, dass die Varianz des Maximum Likelihood Schätzers gegeben ist durch

$$\mathbb{V}[\hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n)] = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \lambda^2 \quad (2)$$

Benutzen Sie dazu wieder die Formel aus Teil (1f) vom Übungsblatt 7.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Resultate vom Übungsblatt 7, dass die Verteilung von  $\hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n)$  gegeben ist durch

$$\text{Prob}[\hat{\lambda}_{\text{ML}} \in [x, x + dx)] =: p_{\hat{\lambda}_{\text{ML}}}(x) dx$$

mit der Dichte

$$p_{\hat{\lambda}_{\text{ML}}}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{(n\lambda)^n}{x^{n+1}} e^{-\frac{n\lambda}{x}} \quad (3)$$

Diese Formel werden wir in der nächsten Aufgabe mit einer geeigneten R-Simulation überprüfen.

**Aufgabe 2:** Wir wollen die Formeln (1), (2) und (3) aus Aufgabe 1 mit einer geeigneten R-Simulation überprüfen. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

a) Legen Sie die Variablen  $N = 10000$  und  $n = 10$  in R an.  $N$  ist die Anzahl der Zufallsexperimente, die wir durchführen werden, und  $n = 10$  ist die Anzahl der exponential-verteilten Zufallszahlen, die wir pro Zufallsexperiment ziehen wollen. Weil wir das  $n$  so klein wählen (auf dem letzten Übungsblatt hatten wir  $n = 1000$ ) ist es jetzt wesentlich, ob man etwa durch  $n$  oder durch  $n - 1$  teilt.

- b) Legen Sie den Vektor `lambdaML` der Länge  $N$  an und initialisieren Sie ihn etwa mit Einträgen 0. Programmieren Sie dann einen Loop von 1 bis  $N$ , der bei jedem Durchlauf  $n$  mit Parameter  $\lambda = 4$  exponential-verteilte Zufallszahlen erzeugt, daraus das  $\hat{\lambda}_{ML}(x_1, \dots, x_n)$  berechnet, und das Resultat dann in dem Vektor `lambdaML` speichert.
- c) Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz von `lambdaML` und vergleichen Sie die Werte mit den theoretischen Resultaten (1) und (2).
- d) Codieren Sie eine benutzer-definierte Funktion `dlambdaML = function(x,n,lambda)`, die durch die rechte Seite von (3) gegeben ist (“d” steht dabei für “density” von  $\hat{\lambda}_{ML}$ ). Erzeugen Sie dann ein Histogramm des Vektors `lambdaML`, wobei Sie den optionalen Parameter `prob = TRUE` setzen, und fügen Sie einen plot von `dlambdaML`, etwa in rot, Ihrem Histogramm zu. Der function-plot und das Histogramm sollten dann also in etwa übereinstimmen.