Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2019/20

7. Übungsblatt zur Vorlesung Ökonometrie

Aufgabe 1: Zufallszahlen $x_1, x_2, ...$ heissen exponential-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, wenn für alle $x \geq 0$

$$\mathsf{Prob}\big[\, x_i \in [x, x+dx) \,\big] \;\; = \;\; \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx$$

gilt und die Wahrscheinlichkeit für negative Zahlen 0 ist, also $\mathsf{Prob}[\, x_i \in [x, x+dx) \,] \; = \; 0$ falls $x < 0$.

a) Es sei x eine mit Parameter $\lambda > 0$ exponential-verteilte Zufallszahl. Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert von x gilt: $\mathsf{E}[x] \; = \; \frac{1}{\lambda}$.

Nehmen wir jetzt an, dass die Zufallszahlen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ gegeben sind, und dass wir wissen, dass sie durch eine Exponentialverteilung mit Parameter λ erzeugt worden sind, wir kennen jedoch den konkreten Wert für λ nicht. Wir möchten das λ mit Hilfe der Maximum Likelihood Methode schätzen:

b) Geben Sie die Likelihood Funktion $L = L(\lambda)$ an. Die Funktion hängt neben λ auch von den gegebenen Zufallszahlen $x_1, \cdots, x_n$ ab, was wir aber nicht im Argument explizit machen, da wir die Funktion durch Variation von λ maximieren möchten, bei festem $x_1, \cdots, x_n$. Berechnen Sie ebenfalls den Logarithmus $\log L(\lambda)$ und vereinfachen Sie das Resultat soweit wie möglich. Da der Logarithmus eine streng monoton steigende Funktion ist, ist das Problem

$$L(\lambda) \;\; \stackrel{!}{\to} \;\; \max$$

äquivalent zu

$$\log L(\lambda) \;\; \stackrel{!}{\to} \;\; \max \, ,$$

aber rechentechnisch und numerisch ist es einfacher, den Logarithmus der Likelihood Funktion $\log L(\lambda)$ zu maximieren.

c) Zeigen Sie, dass der Maximum Likelihood Schätzer für λ gegeben ist durch

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, ..., x_n) \;\; = \;\; \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} \; .$$

Bestimmen Sie dazu das Maximum von $\log L(\lambda)$.

d) Wenn Sie überprüfen sollten, ob $\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}$ erwartungstreu ist, welche mathematische Gleichung müssten Sie dann zeigen?

..bitte wenden

e) Beweisen Sie jetzt: der Maximum Likelihood Schätzer ist nicht erwartungstreu, aber der modifizierte Schätzer

$$\hat{\lambda}_{\text{Etreu}}(x_1, ..., x_n) \quad := \quad \frac{1}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i}$$

ist erwartungstreu. Zum Beweis benötigen Sie die Resultate aus Teil (f) und (g).

f) Zeigen Sie: Für jede Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n \quad = \quad \int_0^\infty f(y)\, \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\, dy$$

g) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt: $\int_0^\infty y^m\, e^{-y}\, dy \;=\; m!$.

Bemerkung: Die Aufgabenteile (f) und (g) sind definitiv nicht Klausur-relevant.

Aufgabe 2: Wir wollen die Resultate aus Aufgabe 1 mit einer geeigneten R-Simulation überprüfen:

a) Die Exponential-Verteilung gehört zu den in R eingebauten Verteilungen. Erzeugen Sie $n = 1000$ mit Parameter $\lambda = 4$ exponential-verteilte Zufallszahlen und speichern Sie sie in dem Vektor `x`. Erstellen Sie einen Plot und ein Histogramm von `x`. Die Syntax für die Exponential-Verteilung können Sie in dem file `W'keitsverteilungen-in-R.pdf` finden, es befindet sich auf der Vorlesungshomepage.

b) Berechnen Sie die Werte der Schätzer $\hat{\lambda}_{\text{ML}}$ und $\hat{\lambda}_{\text{Etreu}}$. Diese Zahlen sollten also in der Nähe von 4 liegen.

c) Legen Sie den Vektor

$$\lambda \;=\; (\, 0.1\, ,\ 0.2\, ,\ 0.3\, ,\ \cdots\ ,\ 9.8\, ,\ 9.9\, ,\ 10.0\,) \;=:\; (\lambda_1, \cdots, \lambda_{100})$$

an. Berechnen Sie dann numerisch den Wert der log-Likelihood-Funktion für alle $\lambda_1, ..., \lambda_{100}$ und speichern Sie diese Zahlen in dem Vektor

$$\texttt{logL} = (\, \texttt{logL}[1]\, ,\, \texttt{logL}[2]\, ,\, ...\, ,\, \texttt{logL}[100]\,).$$

Plotten Sie schliesslich `logL` als Funktion von λ und verifizieren Sie, dass das Maximum von `logL` an der Stelle $\hat{\lambda}_{\text{ML}}$ angenommen wird.

d) Wiederholen Sie die Schritte (a)-(c) noch einmal für verschiedene Werte von n, etwa $n = 2000, 4000, 8000$ und $n = 16000$.