

3. Übungsblatt zur Vorlesung Ökonometrie

Aufgabe 1) Zufallszahlen ξ_1, ξ_2, \dots heißen χ^2 -verteilt mit n Freiheitsgraden oder kurz χ_n^2 -verteilt, wenn

$$P[\xi_i \in (\xi, \xi + d\xi)] = p_{\chi_n^2}(\xi) d\xi$$

mit der Dichte

$$p_{\chi_n^2}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \xi^{n/2-1} e^{-\xi/2} & \text{für } \xi > 0 \\ 0 & \text{für } \xi \leq 0 \end{cases}$$

Dabei ist die Gamma-Funktion gegeben durch (für $x > 0$)

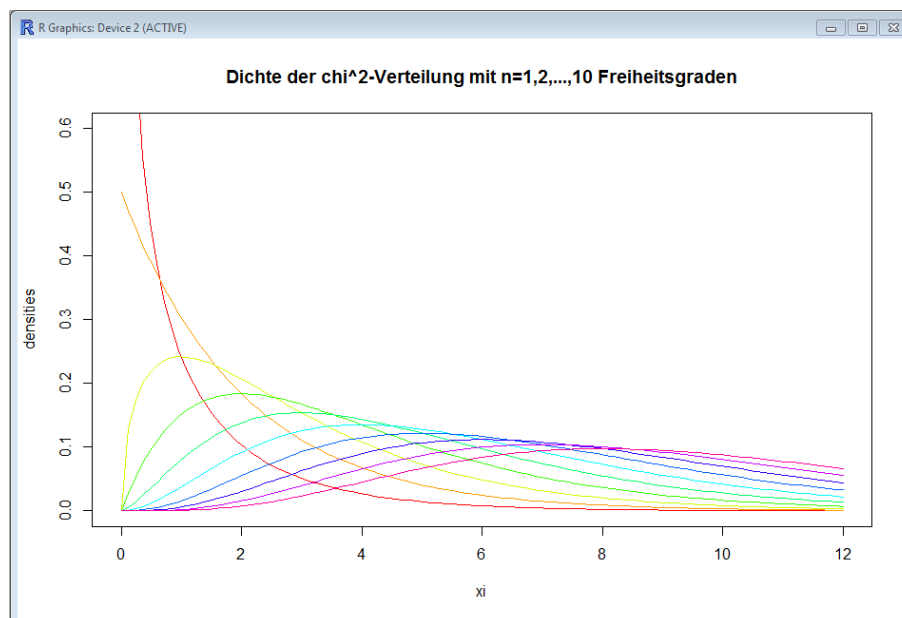
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Es gilt die folgende Aussage $A(n)$: Sind $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ standard-normalverteilte Zufallszahlen (mean=0, sd=1), dann hat die Zufallszahl

$$\xi := \phi_1^2 + \phi_2^2 + \dots + \phi_n^2$$

eine χ_n^2 -Verteilung. Diese Aussage wollen wir in dieser Aufgabe mit einer R-Simulation überprüfen. Starten Sie dazu eine R-Session und führen Sie folgende Berechnungen durch:

a) Versuchen Sie, folgendes Bild zu reproduzieren:



Schauen Sie sich dazu die Übersicht auf Seite 88, das ist die 2. Seite in dem pdf-file, von **W'keitsverteilungen-in-R.pdf** an, um die Syntax für die Dichte-Funktionen $p_{\chi_n^2}(\xi)$ herauszufinden; erinnern Sie sich daran, dass es zu jeder W'keitsverteilung Vert die 4 Funktionen, rVert, dVert, pVert und qVert gibt, welche müssen Sie hier nehmen?

- b) Legen Sie die Variablen $n = 5$ und $N = 10000$ (R unterscheidet Gross- und Kleinbuchstaben) an und erzeugen Sie dann $n \times N$ standardnormalverteilte Zufallszahlen (mean=0, sd=1). Speichern Sie diese Zufallszahlen in einer Matrix

$$\text{Phi} := \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_n \\ \phi_{n+1} & \phi_{n+2} & \cdots & \phi_{2n} \\ \phi_{2n+1} & \phi_{2n+2} & \cdots & \phi_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{(N-1)n+1} & \phi_{(N-1)n+2} & \cdots & \phi_{Nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times n}$$

Berechnen Sie dann die Matrix

$$\text{PhiSquared} := \begin{pmatrix} \phi_1^2 & \phi_2^2 & \cdots & \phi_n^2 \\ \phi_{n+1}^2 & \phi_{n+2}^2 & \cdots & \phi_{2n}^2 \\ \phi_{2n+1}^2 & \phi_{2n+2}^2 & \cdots & \phi_{3n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{(N-1)n+1}^2 & \phi_{(N-1)n+2}^2 & \cdots & \phi_{Nn}^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times n}$$

- c) Benutzen Sie jetzt den Befehl `rowSums()`, um den Vektor

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \phi_1^2 + \phi_2^2 + \cdots + \phi_n^2 \\ \phi_{n+1}^2 + \phi_{n+2}^2 + \cdots + \phi_{2n}^2 \\ \phi_{2n+1}^2 + \phi_{2n+2}^2 + \cdots + \phi_{3n}^2 \\ \vdots \\ \phi_{(N-1)n+1}^2 + \phi_{(N-1)n+2}^2 + \cdots + \phi_{Nn}^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

zu generieren. Erstellen Sie ein Histogramm der relativen Häufigkeiten der Zufallszahlen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, indem Sie den Befehl `hist(xi, prob=TRUE, breaks=20)` eingeben.

- d) Stellen Sie in dem Plot aus (c) jetzt ebenfalls einen Plot der Dichte-Funktion $p_{\chi_n^2}$, etwa in rot, dar. Das Histogramm und diese Dichte-Funktion sollten dann also in etwa übereinstimmen.
- e) Wiederholen Sie die Schritte aus (b-d) für, etwa, $n = 3$ und $n = 10$, um nicht nur die Aussage $A(5)$, sondern ebenfalls die Aussagen $A(3)$ und $A(10)$ zu überprüfen.

Aufgabe 2: Verifizieren Sie durch eine geeignete R-Simulation folgende Aussagen:

- a) Sind ϕ_0 und ϕ_1, \dots, ϕ_n unabhängige, standardnormalverteilte Zufallszahlen, dann ist

$$y := \frac{\phi_0}{\sqrt{\frac{\phi_1^2 + \cdots + \phi_n^2}{n}}}$$

t_n -verteilt.

- b) Sind ϕ_1, \dots, ϕ_k und $\phi_{k+1}, \dots, \phi_{k+\ell}$ unabhängige, standardnormalverteilte Zufallszahlen, dann ist

$$y := \frac{\frac{\phi_1^2 + \cdots + \phi_k^2}{k}}{\frac{\phi_{k+1}^2 + \cdots + \phi_{k+\ell}^2}{\ell}}$$

$F_{k,\ell}$ -verteilt.