Hochschule RheinMain | WS 2019/20
Prof. Dr. D. Lehmann

2. Übungsblatt zur Vorlesung Ökonometrie

Aufgabe 1) Wir betrachten die Dichte der Normalverteilung mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}$ und Standardabweichung $\sigma > 0$, gegeben durch

$$p_{\mu,\sigma}(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

a) Beweisen Sie folgende Identität:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \;=\; \sqrt{2\pi}$$

Schreiben Sie dazu

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \;=\; \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \right\}^{1/2}$$

und benutzen Sie dann Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$.

b) Zeigen Sie für beliebige $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx \;=\; 1\,.$$

c) Plotten Sie mit Hilfe der R-Software die Funktion $p_{\mu,\sigma}(x)$ für

$$(\mu,\sigma) \;=\; (0,1)\,,\;\; (-3,2) \quad \text{und} \quad (2,1/4)\,,$$

also 3 Funktionen, über dem Intervall $x \in [-8, 8]$ in einem Diagramm, in jeweils unterschiedlichen Farben.

d) Plotten Sie mit Hilfe der R-Software die kummulierte Verteilungsfunktion

$$F_{\mu,\sigma}(x) \;:=\; \textstyle\int_{-\infty}^{x} p_{\mu,\sigma}(y)\, dy$$

für

$$(\mu,\sigma) \;=\; (0,1)\,,\;\; (-3,2) \quad \text{und} \quad (2,1/4)\,,$$

also wieder 3 Funktionen, über dem Intervall $x \in [-8, 8]$ in einem Diagramm, in jeweils unterschiedlichen Farben. Schauen Sie sich dazu gegebenenfalls noch einmal die 3 Seiten `W'keitsverteilungen-in-R.pdf` von der Vorlesungshomepage an.

..bitte wenden

Aufgabe 2) Es sei ϕ eine mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ normalverteilte Zufallsvariable.

a) Drücken Sie die Aussage " der Erwartungswert von ϕ ist μ " durch eine exakte mathematische Formel aus und beweisen Sie diese Formel durch explizite Rechnung.

b) Drücken Sie die Aussage " die Varianz von ϕ ist σ^2 " durch eine exakte mathematische Formel aus und beweisen Sie diese Formel durch explizite Rechnung.

c) Es sei jetzt $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von ϕ^2. Sie können dazu gegebenenfalls die Formel aus Aufgabe 3a verwenden.

Aufgabe 3) Die Varianz und die Covarianz von Zufallsvariablen X und Y sind definiert durch

$$\begin{aligned} \mathsf{V}[X] &= \mathsf{E}\big[(X - \mathsf{E}[X])^2\big] \\ \mathsf{Cov}[X, Y] &= \mathsf{E}\big[(X - \mathsf{E}[X])(Y - \mathsf{E}[Y])\big] \end{aligned}$$

Beweisen Sie:

a) $\mathsf{V}[X] = \mathsf{E}[X^2] - \mathsf{E}[X]^2$

b) $\mathsf{Cov}[X, Y] = \mathsf{E}[XY] - \mathsf{E}[X]\mathsf{E}[Y]$