

Lösungen Übungsblatt 7 Ökonometrie

Aufgabe 1: a) Der Erwartungswert ist gegeben durch

$$\begin{aligned} E[x] &= \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &\stackrel{v=\lambda x}{=} \int_0^{\infty} v e^{-v} \frac{dv}{\lambda} \\ &\stackrel{\text{part.Int.}}{=} \frac{1}{\lambda} \left\{ -v e^{-v} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-v}) dv \right\} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left\{ 0 + \int_0^{\infty} e^{-v} dv \right\} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

b) Die Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L(\{x_i\}, \lambda) &= \prod_{i=1}^n \text{Prob}[x_i \in [x_i, x_i + dx_i)] \\ &= \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} dx_i \\ &= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n dx_i \end{aligned}$$

und für den Logarithmus erhalten wir

$$\begin{aligned} \log L(\{x_i\}, \lambda) &= \log \left[\lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n dx_i \right] \\ &= n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i + \text{const} \\ &=: F(\lambda) + \text{const} \end{aligned}$$

wobei die Konstante

$$\text{const} := \log \left[\prod_{i=1}^n dx_i \right]$$

nur von λ unabhängige Terme enthält.

c) Wir maximieren F :

$$\begin{aligned} F'(\lambda) &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i \stackrel{!}{=} 0 \\ \lambda &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} \end{aligned}$$

also ist der Maximum-Likelihood-Schätzer gegeben durch

$$\hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}$$

d) Der Erwartungswert von $\hat{\lambda}_{\text{ML}}$ muss gleich λ sein. Der Erwartungswert von $\hat{\lambda}_{\text{ML}}$ ist durch folgendes Integral gegeben:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n)] &= \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} dx_i \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} d^n x \stackrel{?}{=} \lambda \end{aligned}$$

e) Mit der Formel aus Teil (f) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n)] &= \int_0^\infty \frac{1}{\frac{1}{n} y} \lambda^n e^{-\lambda y} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} dy \\ &= \frac{n\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty y^{n-2} e^{-\lambda y} dy \\ &\stackrel{x=\lambda y}{=} \frac{n\lambda}{(n-1)!} \int_0^\infty x^{n-2} e^{-x} dx \\ &\stackrel{(g)}{=} \frac{n\lambda}{(n-1)!} (n-2)! = \frac{n}{n-1} \lambda, \end{aligned}$$

also ist

$$\hat{\lambda}_{\text{mod}}(x_1, \dots, x_n) := \frac{n-1}{n} \hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i}$$

ein erwartungstreuer Schätzer.

f) Wir substituieren

$$\begin{aligned} y_n &:= x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n \\ y_{n-1} &:= x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \\ &\vdots \\ y_2 &:= x_1 + x_2 \\ y_1 &:= x_1 \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} y_n - y_{n-1} &= x_n \\ y_{n-1} - y_{n-2} &= x_{n-1} \\ &\vdots \\ y_2 - y_1 &= x_2 \\ y_1 &= x_1 \end{aligned} \tag{1}$$

Der Integrationsbereich $(0, \infty)^n$ transformiert sich wie folgt:

$$\begin{aligned} x_n &\in (0, \infty) \\ x_{n-1} &\in (0, \infty) \\ &\vdots \\ x_2 &\in (0, \infty) \\ x_1 &\in (0, \infty) \end{aligned}$$

ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} y_n &\in (0, \infty) \\ y_{n-1} &\in (0, y_n) \\ y_{n-2} &\in (0, y_{n-1}) \\ &\vdots \\ y_2 &\in (0, y_3) \\ y_1 &\in (0, y_2) \end{aligned}$$

Die Funktionaldeterminante $\det \frac{\partial x}{\partial y}$ ist gleich 1, da es eine Dreiecksmatrix ist mit lauter Einsen auf der Hauptdiagonale. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_0^\infty dy_n \int_0^{y_n} dy_{n-1} \cdots \int_0^{y_4} dy_3 \int_0^{y_3} dy_2 \int_0^{y_2} dy_1 f(y_n) \\ &= \int_0^\infty dy_n \int_0^{y_n} dy_{n-1} \cdots \int_0^{y_4} dy_3 \int_0^{y_3} dy_2 y_2 f(y_n) \\ &= \int_0^\infty dy_n \int_0^{y_n} dy_{n-1} \cdots \int_0^{y_4} dy_3 \frac{y_3^2}{2} f(y_n) \\ &= \int_0^\infty dy_n \int_0^{y_n} dy_{n-1} \cdots \int_0^{y_5} dy_4 \frac{y_4^3}{3!} f(y_n) \\ &\vdots \\ &= \int_0^\infty dy_n \frac{y_n^{n-1}}{(n-1)!} f(y_n) \end{aligned}$$

g) Mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y^m e^{-y} dy &= y^m (-e^{-y}) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty m y^{m-1} (-e^{-y}) dy \\ &= 0 + m \int_0^\infty y^{m-1} e^{-y} dy \\ &= m(m-1) \int_0^\infty y^{m-2} e^{-y} dy \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & = m(m-1)\cdots 2\cdot 1 \int_0^\infty y^0 e^{-y} dy \\ & = m! \int_0^\infty e^{-y} dy = m! . \end{aligned}$$