Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2019/20

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Es seien z_0 und z_1 komplexe Zahlen und γ_{z_0,z_1} die gerichtete Strecke von z_0 nach z_1, etwa parametrisiert durch $\gamma_{z_0,z_1}(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$ mit $t \in [0,1]$. Berechnen Sie folgende komplexe Wegintegrale

$$\int_{\gamma_{z_0,z_1}} f(z)\,dz$$

auf möglichst einfache Weise:

a) $f(z) = z^2, \quad z_0 = 1 + i, \quad z_1 = 2 + i$

b) $f(z) = \cos z, \quad z_0 = -i, \quad z_1 = 1 + i$

c) $f(z) = e^z, \quad z_0 = 2, \quad z_1 = i\pi/2$

d) $f(z) = z\,e^z, \quad z_0 = -1 - i\pi/2, \quad z_1 = 2 + i\pi$

e) $f(z) = z\,\cos z, \quad z_0 = 0, \quad z_1 = i$

f) $f(z) = \mathrm{Log}(z), \quad z_0 = 1, \quad z_1 = 1 + i$

Geben Sie Ihr Resultat in der Form $a + ib$ an mit Realteil a und Imaginärteil b.
Hinweis zu (d-f): Partielle Integration.

2.Aufgabe: Es sei

$$K_r(z_0) \;:=\; \left\{\, z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - z_0| = r \,\right\}$$

der Kreis mit Radius $r > 0$ um $z_0 \in \mathbb{C}$ in der komplexen Ebene. Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale

a) $$\int_{K_r(z_0)} (z - z_0)^n\,dz \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \cdots$$

b) $$\int_{K_r(z_0)} \frac{dz}{z - z_0}$$

c) $$\int_{K_r(z_0)} \frac{dz}{(z - z_0)^n} \qquad \text{für } n = 2, 3, 4, \cdots$$

indem Sie den Kreis in geeigneter Weise parametrisieren.

3.Aufgabe (Die Mandelbrot-Menge): Die Mandelbrot-Menge $\mathbb{M}$ ist definiert als die Menge aller komplexen Zahlen c, für die die rekursiv definierte Folge

$$z_0 := 0 \tag{1}$$
$$z_{n+1} := z_n^2 + c \tag{2}$$

dem Betrage nach beschränkt bleibt. Also:

$$\mathbb{M} := \left\{ c \in \mathbb{C} \,\Big|\, \sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n| < +\infty \right\} \tag{3}$$

mit z_n gegeben durch die Gleichungen (1,2). Für eine numerische Simulation wollen wir als Kriterium für die Beschränktheit

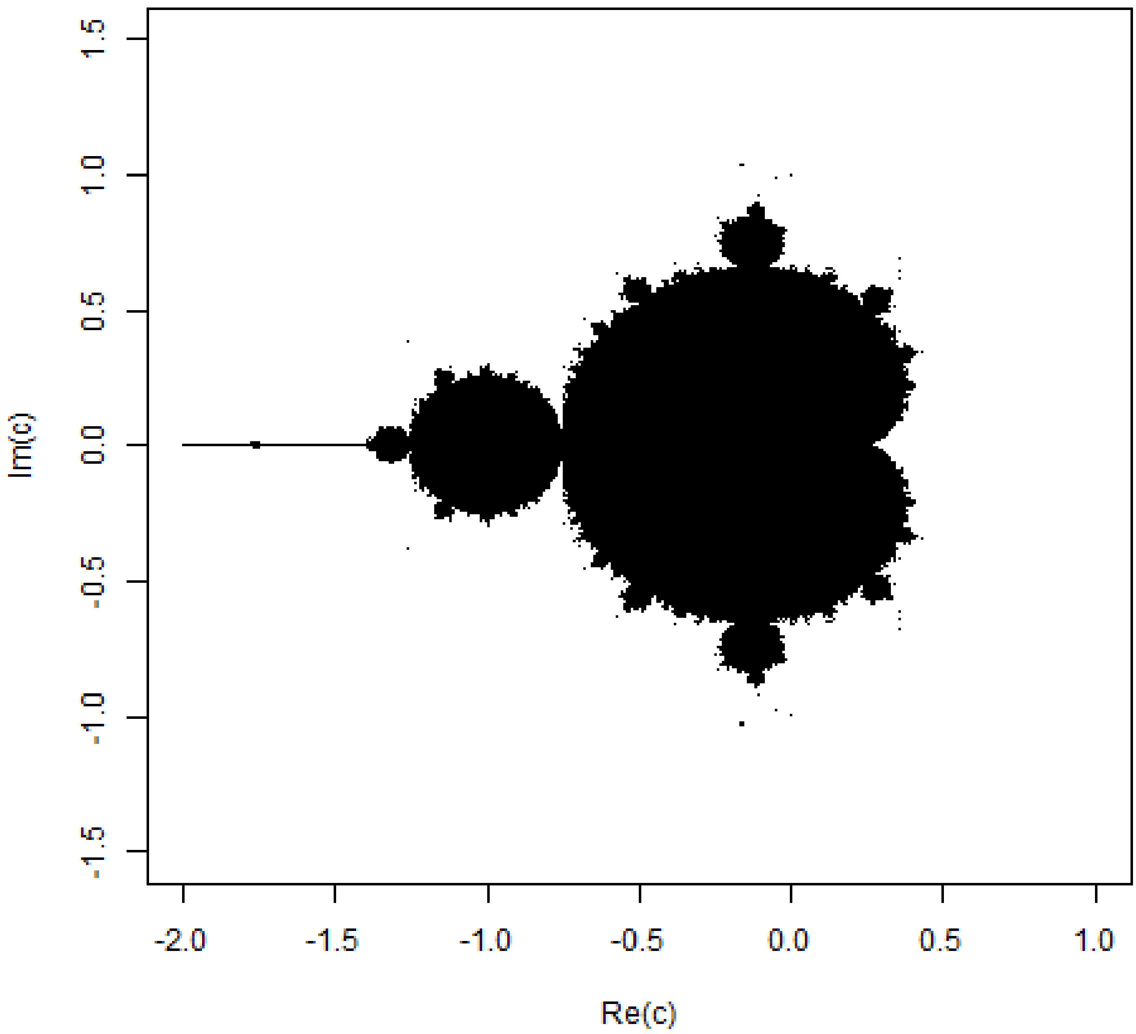
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n| < +\infty \quad \overset{\text{numerisch}}{\rightsquigarrow} \quad \sup_{n\in\{1,\ldots,100\}} |z_n| < 1000 \tag{4}$$

wählen. Verwenden Sie etwa folgendes Code-Fragment,

```
maxiter = 100
c = 0 + 1i*0
plot( c , xlim=c(-2,1) , ylim=c(-1.5,1.5) )      # points will be added below
                                                  # through points()-command
for( x in seq(from=-2,to=1,by=0.005) )
{
  for(y in seq(from=-1.5,to=1.5,by=0.005) )
  {
    c = x+1i*y
    z = 0
    iter = 0
    while( ... & ... )
    {
      z = z^2 + c
      iter =  ...
    }
    if( ... )
    {
      points(c,pch=".",col="black")               # point is in Madelbrot set
    }
  }
}
```

um dann folgendes Bild zu generieren, was die Mandelbrot-Menge in Schwarz zeigt (benötigt etwa 20 Sekunden Rechenzeit):

..siehe nächstes Blatt



1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.5
Im(c)
-2.0
-1.5
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
Re(c)