Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

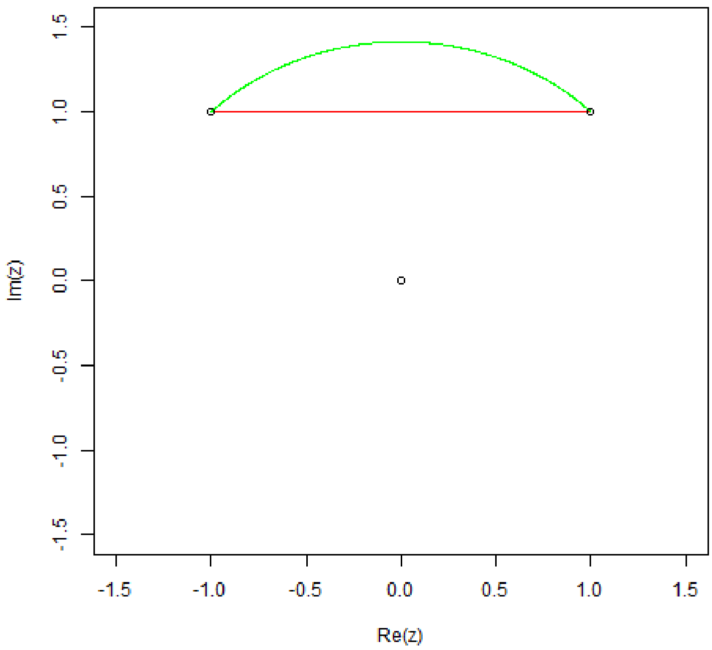
WS 2019/20

8. Übungsblatt zur Vorlesung
Komplexe Funktionen

1.Aufgabe: Berechnen Sie das komplexe Wegintegral

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz$$

für die beiden folgenden Wege:



Der rote Weg ist die gerichtete Strecke von $z_0 = 1 + i$ nach $z_1 = -1 + i$ und der grüne Weg ist der gerichtete Kreisbogen um den Ursprung von $z_0 = 1 + i$ nach $z_1 = -1 + i$.

2.Aufgabe: Berechnen Sie das komplexe Wegintegral

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$$

für die beiden Wege, den roten und den grünen, aus Aufgabe 1, indem Sie

a) die Wege parametrisieren und das komplexe Integral auf reelle Integrale zurückführen

b) die Stammfunktion der Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ benutzen.

..bitte wenden

3.Aufgabe: Starten Sie eine R-Session.

a) Erzeugen Sie das Bild aus Aufgabe 1 mit dem roten Weg γ_{red} und dem grünen Weg γ_{green}.

b) Mit dem folgenden Code können Sie numerisch das Integral $\int_{\gamma_{\text{red}}} z\,dz$ berechnen:

```
n = 1000
t = seq( from=0, to=1, length=n )
z = 1-2*t+1i
# quick check:
plot(z)             # ok

dz = diff(z)        # erzeugt den Vektor
                    # (z[2]-z[1],z[3]-z[2],...,z[n]-z[n-1])
                    # der Laenge n-1

# wir wollen die Riemannsche Summe
#    z[2]*(z[2]-z[1])
#  + z[3]*(z[3]-z[2])
#  + z[4]*(z[4]-z[3])
#  +   . . .
#  + z[n]*(z[n]-z[n-1])  berechnen:

# wir entfernen das z[1] vom Vektor z:

zz = z[-1]          # hat jetzt Laenge n-1
# check:
length(z)
length(zz)
length(dz)
z
head(z)
head(zz)            # looks ok.

# und jetzt das Integral als Riemannsche Summe:

sum( zz * dz )      # -2i bis auf discretization error = O(1/n)
```

Eliminieren Sie sämtliche Code-Zeilen, die für die tatsächliche Berechnung des Integrals nicht benötigt werden, und berechnen Sie dann numerisch die Integrale aus Aufgabe 1 und 2,

$$\int_{\gamma_{\text{red}}} \bar{z}\,dz\,, \quad \int_{\gamma_{\text{green}}} \bar{z}\,dz\,, \quad \int_{\gamma_{\text{red}}} \tfrac{1}{z}\,dz\,, \quad \int_{\gamma_{\text{green}}} \tfrac{1}{z}\,dz\,.$$

Vergleichen Sie die numerischen Resultate mit Ihren analytischen Rechnungen.

4.Aufgabe: Es sei $\sqrt{z}$ der sogenannte Hauptzweig der komplexen Wurzelfunktion, gegeben durch

$$\sqrt{z} \;=\; z^{1/2} \;:=\; e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}_{(-\pi,\pi]}(z)}$$

wobei $\mathrm{Log}_{(-\pi,\pi]}(z)$ der Hauptzweig der komplexen Logarithmus-Funktion ist, mit Imaginärteil in $(-\pi,\pi]$. Weiter seien $K_r^{\pm}$ die beiden Kreisbögen um den Ursprung mit Radius r, die ($\varepsilon > 0$)

$$\begin{array}{llllll} \text{für } K_r^+: & \text{von } z_0 = r & \text{über } & ir & \text{nach } & z_{1,+} = r\,e^{i(\pi-\varepsilon)} \\ \text{für } K_r^-: & \text{von } z_0 = r & \text{über } & -ir & \text{nach } & z_{1,-} = r\,e^{i(\pi+\varepsilon)} \end{array}$$

..weiter auf dem nächsten Blatt

verlaufen. Berechnen Sie die komplexen Wegintegrale

$$\int_{K_r^{\pm}} \frac{1}{2\sqrt{z}}\, dz$$

für die beiden Wege $K_r^{\pm}$ im Limes $\varepsilon \to 0$, indem Sie

a) die Wege parametrisieren und das komplexe Integral auf reelle Integrale zurückführen

b) die Stammfunktion der Funktion $f(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$ benutzen.