4. Übungsblatt zur Vorlesung Komplexe Funktionen

Abbildungen in Farbe online:

http://hsrm-mathematik.de/WS201920/semester3/KomplexeFunktionen/ueb4.pdf

1.Aufgabe: Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von folgenden komplexen Funktionen und zeigen Sie, dass der Realteil und der Imaginärteil harmonische Funktionen sind:

a) $f(z) = z^2$

b) $f(z) = z^3$

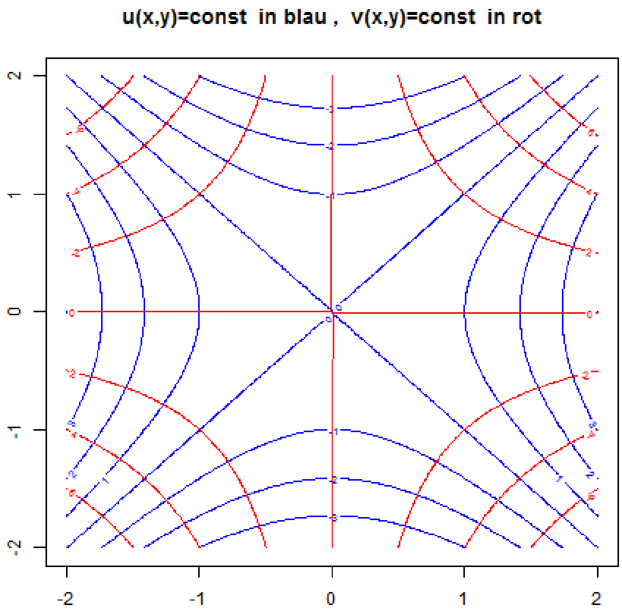
c) $f(z) = e^z$

2.Aufgabe: Mit dem folgenden R-Code können Sie die Höhenlinien vom Real- und Imaginärteil der Funktion $f(z) = z^2$ plotten:

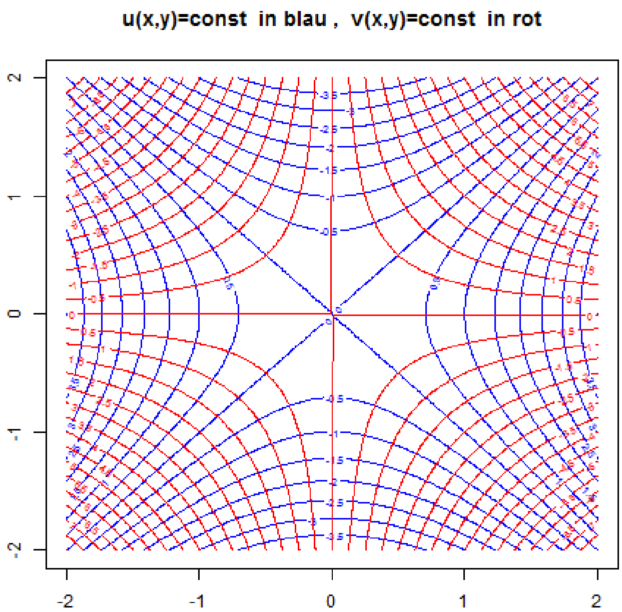
```
u1 = function(x,y)
{
  z = x+1i*y
  res = Re(z^2)
  return(res)
}
v1 = function(x,y)
{
  z = ...
  res = Im ...
  ...
}

# Hoehenlinien koennen mit einem Contour-Plot
# dargestellt werden: der contour()-Befehl hat
# die Syntax
# contour(  vector ,  vector , matrix ) =
# contour( x-Achse , y-Achse , f(x,y) ) ,
# die f(x,y)-Werte muessen also als Matrix
# uebergeben werden:

x = seq(from=-2,to=2,by=0.01)
y = x
nx = length(x)
ny = nx

# die Funktionswerte von u und v werden in
# eine Matrix mat_u, mat_v geschrieben:

mat_u = matrix(0,nx,ny)
mat_v = ...
for(i in 1:nx)
{
  for( ... )
  {
    mat_u[i,j] = u1(x[i],y[j])
    mat_v ...
  }
}

info = "u(x,y)=const  in blau ,  v(x,y)=const  in rot"
contour( x , y , mat_u , col = "blue" , main=info )
contour( x , ... , add=TRUE )
```

a) An einigen Stellen, die mit "..." gekennzeichnet sind, ist der Code unvollständig. Ergänzen Sie die fehlenden Code-Fragmente, so dass Sie dann folgendes Bild erzeugen können, mit u=Re(f), v=Im(f):

..bitte wenden



b) Der `contour()`-Befehl hat einen optionalen Parameter, mit dem Sie die Anzahl der geplotteten Höhenlinien kontrollieren können. Finden Sie diesen Parameter und versuchen Sie dann in etwa folgendes Bild zu generieren:



c) Erzeugen Sie jetzt die analogen Bilder zu den Funktionen $f(z) = z^3$ und $f(z) = e^z$.

d) Bei sämtlichen Bildern werden Sie feststellen, dass die blauen Linien senkrecht auf den roten Linien stehen (bis auf Punkte, wo die Ableitungen von u und v verschwinden). Versuchen Sie jetzt, das theoretisch zu beweisen, indem Sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen verwenden.

..weiter auf dem nächsten Blatt

3.Aufgabe: Zeigen Sie, dass folgende Funktionen $u(x,y)$ harmonisch sind und bestimmen Sie jeweils ein harmonisch konjugiertes $v(x,y)$:

a) $u(x,y) = e^{-y}\cos x$

b) $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

Können Sie jeweils die komplexe Funktion $f(z) = f(x+iy)$ angeben, so dass $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ ist?

4.Aufgabe: **a)** Es seien $u_1(x,y) = x^2 - y^2$ und $u_2(x,y) = x^3 - 3xy^2$. Zeigen Sie, dass u_1 und u_2 harmonisch sind, das Produkt $u_1 \cdot u_2$ ist jedoch nicht harmonisch.

b) Es seien $u(x,y)$ und $v(x,y)$ zwei harmonische Funktionen und v sei harmonisch konjugiert zu u. Beweisen Sie: Dann ist das Produkt $u \cdot v$ ebenfalls wieder harmonisch.